

2015 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）：_____

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）：_____

所属学校（请填写完整的全名）： 重庆邮电大学

参赛队员（打印并签名）： 1. _____ 邓涵铖 _____

2. _____ 张嘉瑶 _____

3. _____ 郭一凡 _____

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）： _____

日期： 2016年9月12日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2015 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编号专用页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人										
评分										
备注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

摘要

本文通过对自动泊车系统的研究,参考生活中的倒车入库的实际情况,对整个倒车过程车辆运动规律进行深入分析之后,得出自动可以通过各类传感器获取车位相对汽车的距离,通过控制汽车前轮转角和瞬时速度控制车辆行驶来实现,而为实现安全入库,需要我们规划路径使行驶的路径最短且又能展现最快速的倒车入库的效果。

问题一:我们以车库入口中点为原点,水平向右为 x 轴正方向,垂直向上为 y 轴正方向建立平面直角坐标系,令车库的正中间为理想停车点,选取右后轮进行分析。因为有边界的限制和临界条件,我们得出可行性的范围为 $125.5 \leq y_0 \leq 4769.63$ 。我们得出最短路径即为方向盘角度最大,得出 $R = 2855\text{mm}$ 且转 90° 使车身与车位在同一直线上后,直接倒车完成入库。离理想停车位置垂直距离最近的理想停车起始点为 $(3551.687, 696.6870)$ 。因为边界限制,现对位置进行分组,在 $y_0 = 696.6870$ 到上限间汽车采取 $\frac{1}{4}$ 圆倒车入库,而在 $y_0 = 696.6870$ 以下进行“一进二退”,汽车先前进或后退至每一个 y 所对应的唯一理想停车点 $s_0(x_0, y_0)$,再通过向左转最大转角 $\varphi = 37^\circ$ 前进至最短路径中圆弧相切的位置再按最短路径倒车。并通过 MATLAB 算出不同 y 值所对应的最短路径。(见附录 1)

问题二:从问题一算出的理想的停车起始点倒车,采取最佳泊车策略并求出前轮转角和后轮行驶距离。首先我们先增加了对停车位置的约束条件得出车需要 $9.55\text{mm} \leq y_0 \leq 5563.6289\text{mm}$ 的范围以内才能安全入库。然后得出直接倒车 $\frac{1}{4}$ 圆至车身与理想停车点所在垂直方向直线重合的最小 $y_{r0} = 1196.687$ 。在 $y_{r0} - y_0$ 之间,前轮转角为最大转角 37° ,行驶距离为 $\frac{\pi}{2}R + \Delta y$ 。我们取了 6 个点代入模型,具体求出了其具体泊车策略。

关键词: 最短路径 MATLAB CAD 实时模拟 数形结合

一、 问题重述

1. 建立模型，按照车辆与车位之间的距离把车辆位置进行分组，给出每一组对应的倒车理想起始点， $a=400\text{mm}$ ， $b=8000\text{mm}$ ， $c=300\text{mm}$ 。
2. 建立模型，给出由理想起始点到倒车入库的泊车策略，包括车速、前轮转角、后轮行驶距离。

二、 问题分析

1. 针对问题一，要求实现汽车自动、安全、快速的停车入库。自动不是我们考虑的内容，为实现安全入库，所以汽车原则上不能越过边界，而且行驶速度不能太快。为实现快速停车入库，又由于行驶速度不能太快，所以这里我们需要确定汽车行驶速度为一个定值以简化问题，使整个停车过程中行驶路程最短即可达到最快速的停车入库效果。首先建立平面直角坐标系，由于在开始停车之前可以前进或后退，则说明横坐标不是我们考虑的内容，也就是说我们只用找到每一纵坐标下的理想停车起始点使得倒车路径最短即可。也就说明其中有一纵坐标能够使得整个停车路径最短。所以我们可以找到最短路径下的理想停车起始点的纵坐标，通过这个坐标对倒车理想起始点进行分成3组。
2. 针对问题二，题目并未给出类似于问题一中 a, b, c 的值，所以这一问题中，边界问题需要重新计算，最短路径下的理想停车起始点也不同。重新分析过后，可以得出不同纵坐标下的停车策略。

三、 符号说明

v_l	车长
v_w	车宽
v_h	车高
A_l	轴距
W_f	前轮轮距
W_r	后轮轮距
D_{min}	车离槽的最小距离
φ	方向盘转角

L	汽车“一进二退”倒车三段总路程
L_1	汽车由理想停车起始点开始往前前行的距离
L_2	汽车由理想停车起始点开始往前前行到达某一位置后，开始倒车直至使车身与车位在同一直线上的行驶距离
L_3	车身与车位在同一直线上后，车直线倒车到理想停车终点的距离
$s_0(x_0, y_0)$	汽车在纵坐标为 y_0 下的理想停车起始点汽车右侧后轮所在位置
$s_1(x_1, y_1)$	汽车由理想停车起始点前进到此位置开始倒车时汽车右侧后轮所在位置
$s_2(x_2, y_2)$	汽车倒车至车身恰好与车位在同一直线时汽车右侧后轮所在位置
$s_3(794, -4375)$	汽车位于理想停车终点时汽车右侧后轮所在位置
R_{r0}	汽车方向盘最大转角下的汽车行驶路径半径
$s_{r0}(x_{r0}, y_{r0})$	汽车位于最短停车路径下的理想停车起始点时汽车右侧后轮所在位置

四、问题假设

1. 假设汽车在行驶过程中不会碰到障碍物。
2. 假设汽车方向盘最大转角为 37° 。
3. 假设汽车方向不会因地面摩擦等无关因素改变。
4. 假设汽车行驶速度为 3.6km/h。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 模型的准备

题目要求我们实现汽车自动、安全、快速的停车入库。自动可以通过各类传感器获取车位相对汽车的距离，通过控制汽车前轮转角和瞬时速度控制车辆行驶来实现，这一点不属于我们考虑的范畴。为实现安全入库，所以汽车不能越过边界，而且行驶速度不能太快。为实现快速停车入库，又由于行驶速度不能太快，所以这里我们需要确定汽车行驶速度为一个定值以简化问题，使整个停车过程中行驶路程最短即可达到最快速的停车入库效果。

5.1.2 模型的建立

1. 如图 1 所示，以车库入口中点为原点，水平向右为 x 轴正方向，垂直向上为 y 轴正方向建立平面直角坐标系。

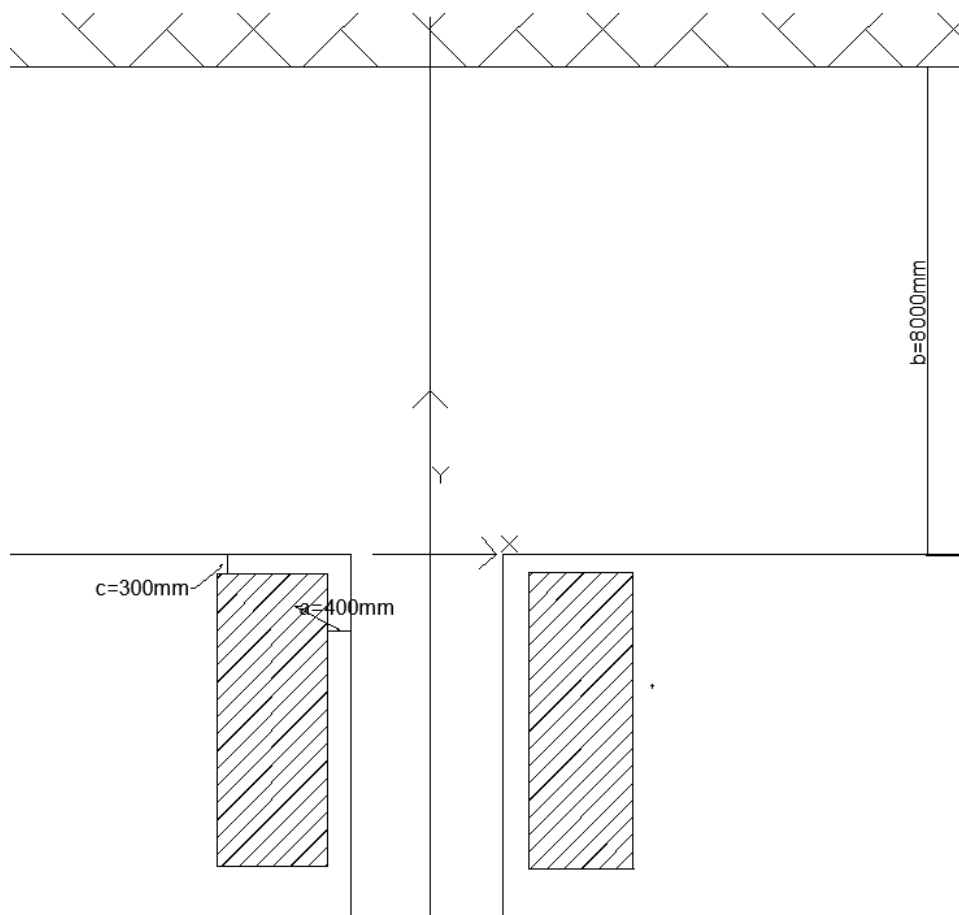


图 1 在车库中建立的平面直角坐标系

建立坐标轴后的车库为关于 y 轴对称的轴对称图形，为简化问题，所以我们可以仅汽车起始位置车头朝 x 轴正方向的情况，当汽车起始位置车头朝 x 轴负方向时，利用对称即可解决。为更好分析汽车运动过程中的情况，我们选取汽车中的右侧后轮进行分析。设汽车在纵坐标为 y_0 下的理想停车起始点汽车右侧后轮所在位置为 $s_0(x_0, y_0)$ 。坐标轴中将以毫米（mm）作为单位。

2. 对停车可行区域进行分析。

汽车在进行 $1/4$ 圆弧倒车时，若直接贴上边沿开始，汽车左前角必定会碰撞到墙壁如图 2 所示，所以必须对 y 坐标进行约束。

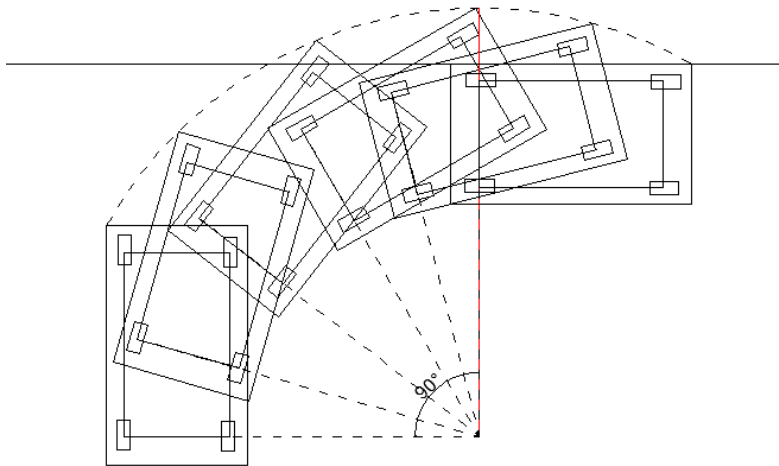


图 2 汽车沿边沿倒车碰壁示意图

如图3所示,汽车此时左前角距离上壁最大距离为 $B'C = OB' - OC = OB - OC$,
 又 $OB^2 = BC^2 + OC^2$, 其中 $BC = L_{fr}$, $OC = R_{\min} + W_c/2$, 经计算可得
 $B'C = 1516.87mm$ 。所以汽车右后轮的纵坐标 y_0 最大为 4769.63。

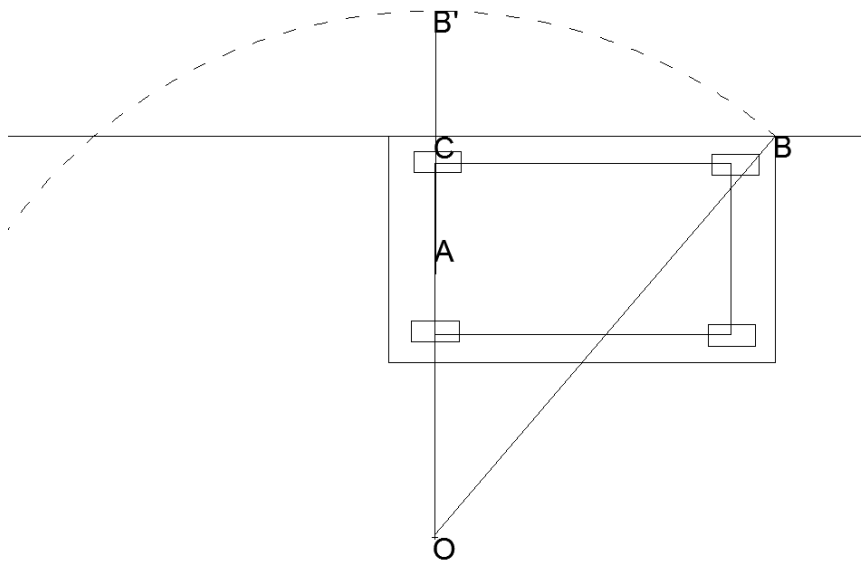


图 3 上边沿碰壁分析

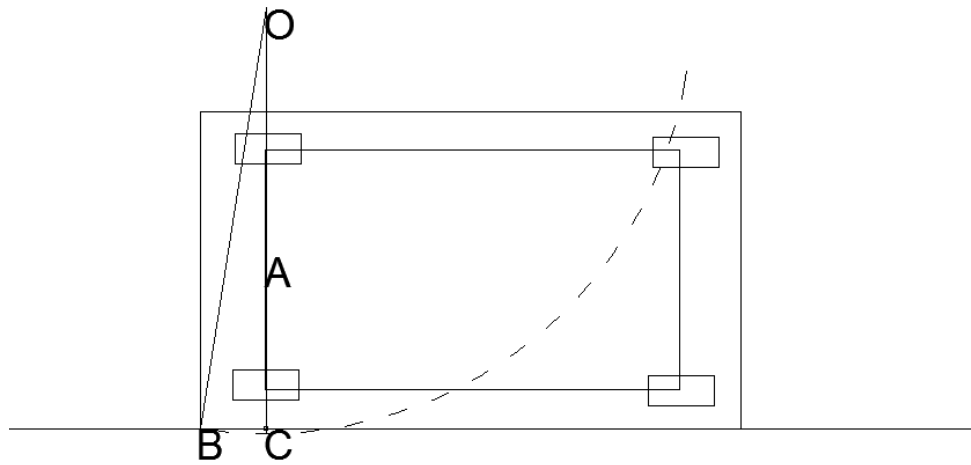


图 4 下边沿碰壁分析

同理，如图 4，在车辆由下壁出发时 y 也存在下限，即 $OB' - OC$ ，经计算可得其值为 $30mm$ 。但由于题目给出一段由 a 和 c 构成的区域为可行区域，经过计算，发现汽车沿着下边界行驶及转弯时，车身不会超出由 a 和 c 构成的区域，所以，汽车可以从下边界出发。所以汽车右后轮的纵坐标 y_0 最小为 125.5 ，所以由于边界的限制，通过计算可以得到 $125.5 \leq y_0 \leq 4769.63$ 。

3. 确定理想停车位置为车库正中间。

为实现快速停车入库，又由于行驶速度不能太快，所以这里我们需要确定汽车行驶速度为一个定值以简化问题，使整个停车过程中行驶路程最短即可达到最快速的停车入库效果。要比较各种停车行驶路径的长短，就必须设定一个停车的最终位置，也就是理想停车位置，如图 5 所示。使车停在车库正中间，正好符合安全停车这一要求，即：理想停车位置为汽车后轴中心在 $s_4(0, y_3)$ ，则汽车右后轮的位置在 $s_3(\frac{w_r}{2}, y_3)$ 。通过计算，得到 $y_3 = -4375$ ，即理想停车位置时汽车右后轮的位置为 $s_3(794, -4375)$ 。

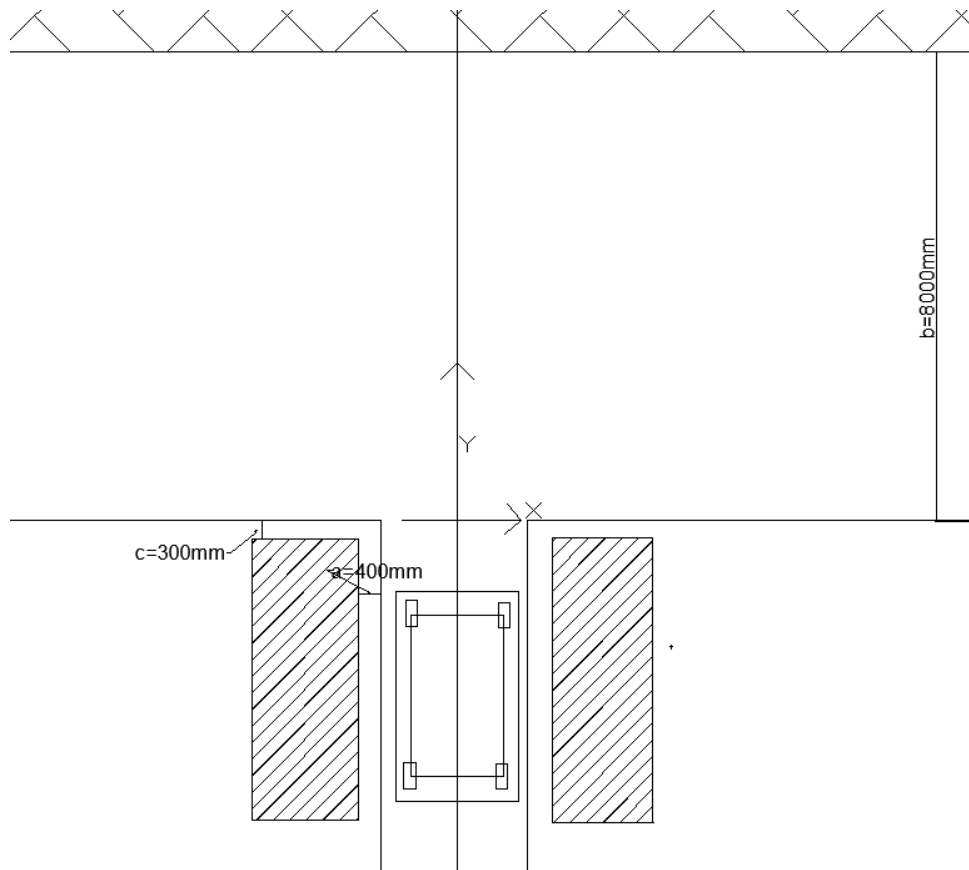


图 5 汽车位于理想停车终点示意图

4. 对最短路径进行分析。

1) 确定 $L_1 + L_2$ 的最短长度

由于汽车是由一个与车库垂直的理想停车起始点出发，通过“一进二退”，到达与车库平行的理想停车终点，在出发到车身与车库平行的过程中，汽车车身的整体方向转了 $\frac{\pi}{2}$ ，也就是转了 $\frac{1}{4}$ 圆，而且这个圆的半径是由汽车方向盘转角 φ

决定的。通过参考文献可知，当汽车的最大转角 $\varphi = 37^\circ$ 时（注：参考文献给出的汽车方向盘最大转角为 $30^\circ-40^\circ$ ，为方便计算，我们将其定为 37° ），汽车所转出为圆的路径半径 R_{r0} 为最小，同时这个圆的周长也就越小。也就是汽车由理想停车起始点从理想停车起始点出发行驶到车身与车位在同一直线上两段行驶距离之和 $L_1 + L_2$ 最小，其值为

$$(L_1 + L_2)_{min} = \frac{\pi R_{r0}^2}{2}$$

2) 确定 L_3 的最短长度

由 1) 中推断，1) 中的“一进一退”可以最短视为一次倒车即可使车身与车位在同一直线上，即 $L_1=0$ 。同理，“一进两退”可视为汽车由一理想停车起始点

通过 $\frac{\pi}{2}$ 的倒车直接停到理想停车终点，即还可省略最后一步倒车步骤，即 $L_3=0$ 。

但是，通过作图及数据分析，我们发现当 $L_3=0$ 时，汽车将超出限定区域，如图6所示，不符合题目中“安全”这一要求，所以 $L_3=0$ 这种情况不存在。

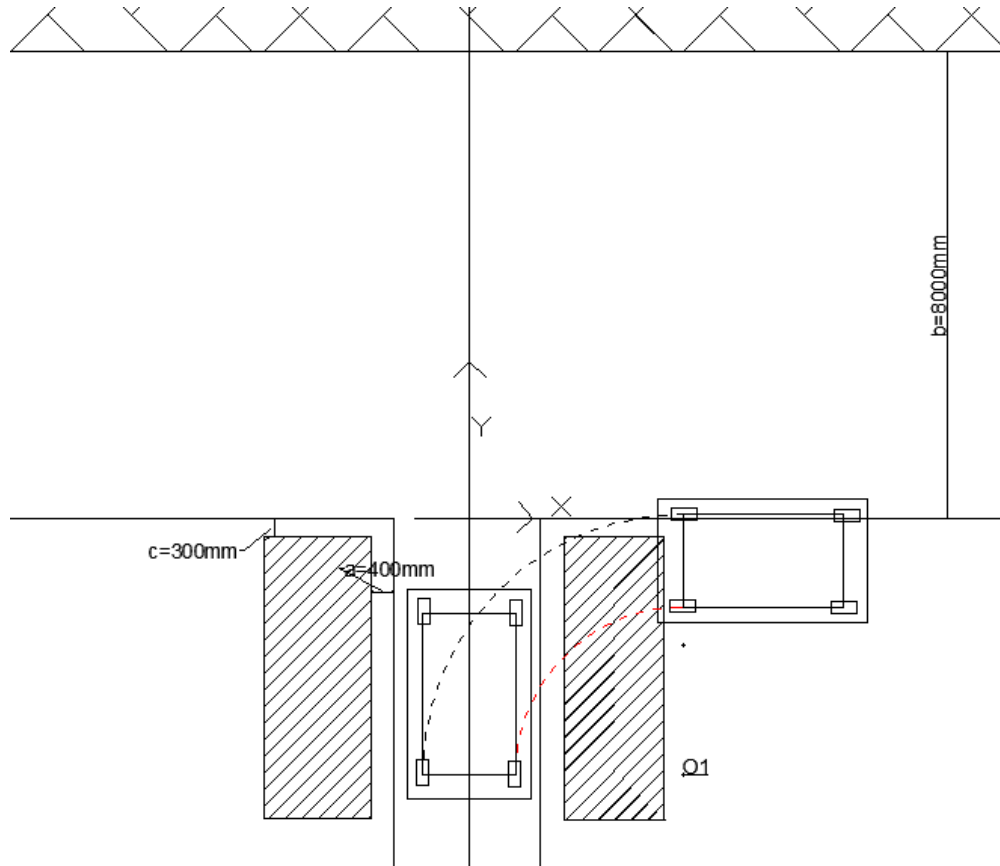


图6 汽车直接倒车至理想停车终点

通过作图及数据分析，图7所示，我们发现当汽车倒车过程中，倒车所形成的弧线与ac边界的夹角相切时，可使汽车倒车至车身与车位在同一直线上后，与理想停车终点距离最短，即 L_3 最小，采用这种停车方式时，当倒车至车身恰好与车位在同一直线，后轮位置为 $s_2(x_2, y_2)$ ，则 L_3 最小为 $L_{3min} = y_2 - y_3$ 。

综上所述，汽车由理想停车起始点，通过“一进二退”到达理想停车终点的最小路径为：

$$L_{min} = (L_1 + L_2)_{min} + L_{3min} = \frac{\pi R_{r0}^2}{2} + y_2 - y_3$$

(R_{r0} , y_2 , y_3 在5.1.2的5中会有求解方法)

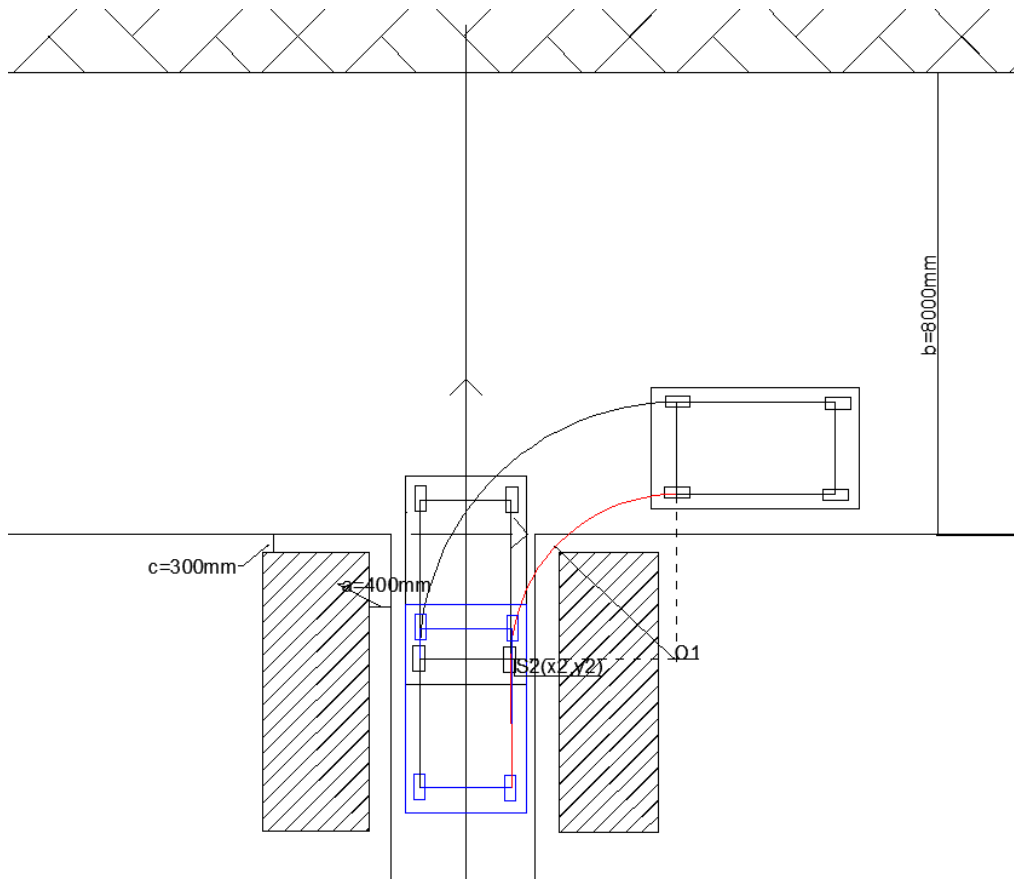


图 7 最短停车路径示意图

5. 根据阿克曼转向几何公式：

$$R = \frac{A_l}{\tan \varphi} = A_l \cot \varphi$$

即汽车后轴中心的转弯半径为

$$R = \frac{A_l}{\tan \varphi} = A_l \cot \varphi$$

汽车后轮内侧的转弯半径为

$$R_{r0} = \frac{A_l}{\tan \varphi} = A_l \cot \varphi - \frac{W_r}{2}$$

由于汽车总有一个最大转角，且对应着最小的转弯半径。我们先求出 5.1.2 中 3 中提到的最短路径下，即由一个位置能通过最小转弯半径 R_{r0} 第一次倒车即可倒车入库且与离理想停车位置垂直距离最近的理想停车起始点 $S_{r0}(x_{r0}, y_{r0})$ 。

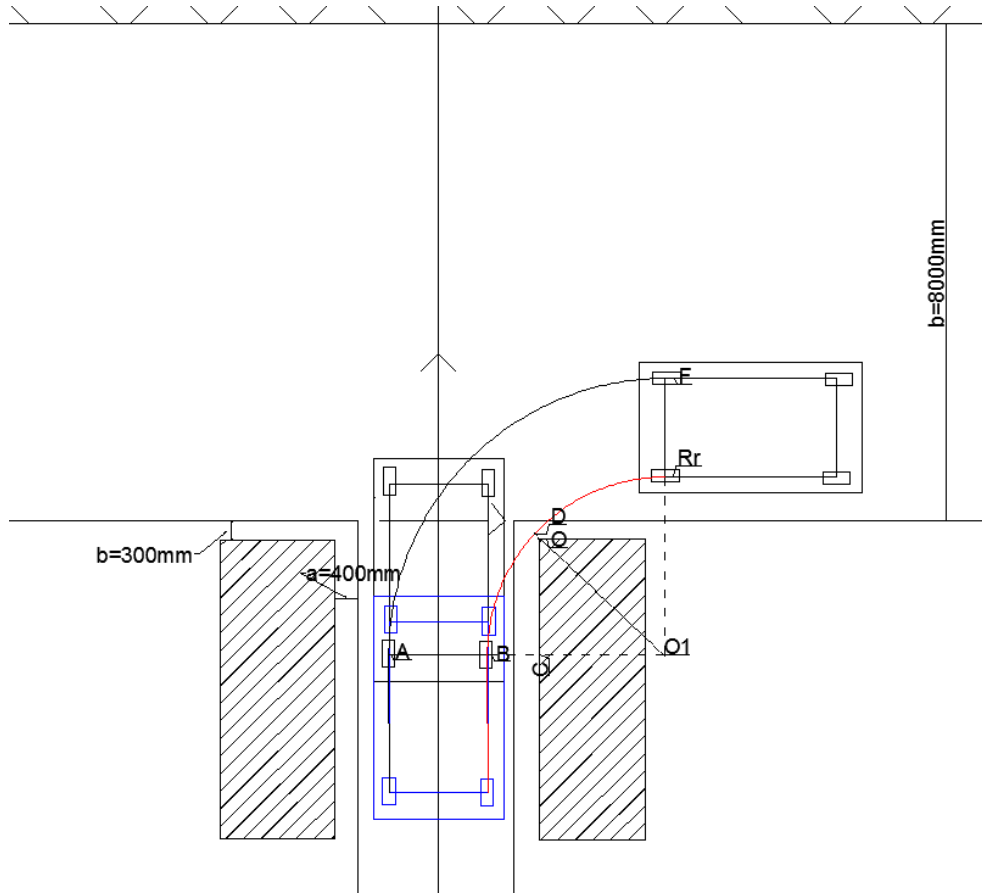


图 8 最短路径下路径长度关系图

$$\left\{ \begin{array}{l} OD = D_{min} = O_1D - O_1O \\ O_1C = A_l \cot \varphi - \frac{SL + a}{2} \\ OC = O_1E = O_1F - y_{r0} - \frac{W_r}{2} = A_l \cot \varphi - y_{r0} - \frac{W_r}{2} - c \\ O_1O = \sqrt{OC^2 + O_1C^2} \end{array} \right.$$

通过对以上等式联立整理，得到：

$$y_{r0} = A_l \cot \varphi - \frac{W_r}{2} - c - \sqrt{OC^2 - O_1C^2}$$

利用 MATLAB 求解（见附录一），得到 $y_{r0} = 696.6870$ ， $R_{r0} = 2855$

则 $x_{r0} = R_{r0} + \frac{W_r}{2} = 3551.687$ 。

6. 对车辆位置进行分组

因为题目给定停车方式为：当车辆位于与车位垂直的任意位置时，先通过前

行或后退到达理想停车起始点后，再进行“一进二退”。所以这里我们不用考虑车辆起始的水平位置，只用考虑车辆所在垂直位置，所以这里我们只用对车辆的纵坐标进行讨论，并通过车辆的纵坐标进行分组，得到每一纵坐标下车辆的理想停车起始点。

1) 当汽车的右后轮起始位置纵坐标 $y_0 = y_{r0}$ ，即 $y_0 = 696.6870$ 时。

2) 当汽车的右后轮起始位置纵坐标 $125.5 \leq y_0 < y_{r0}$ ，即 $-174.5 \leq y_0 \leq 696.6870$ 时。

3) 当汽车的右后轮起始位置纵坐标 $y_{r0} < y_0 \leq 6286.5$ ，即 $696.6870 \leq y_0 \leq 6286.5$ 时。

5.1.3 模型的求解

1. 当汽车的右后轮起始位置纵坐标 $y_0 = y_{r0}$ ，即 $y_0 = 696.6870$ 时。

此时理想起始点为(3551.687, 696.6870)。

2. 当汽车的右后轮起始位置纵坐标 $125.5 \leq y_0 < y_{r0}$ ，即 $125.5 \leq y_0 \leq 696.6870$ 时。

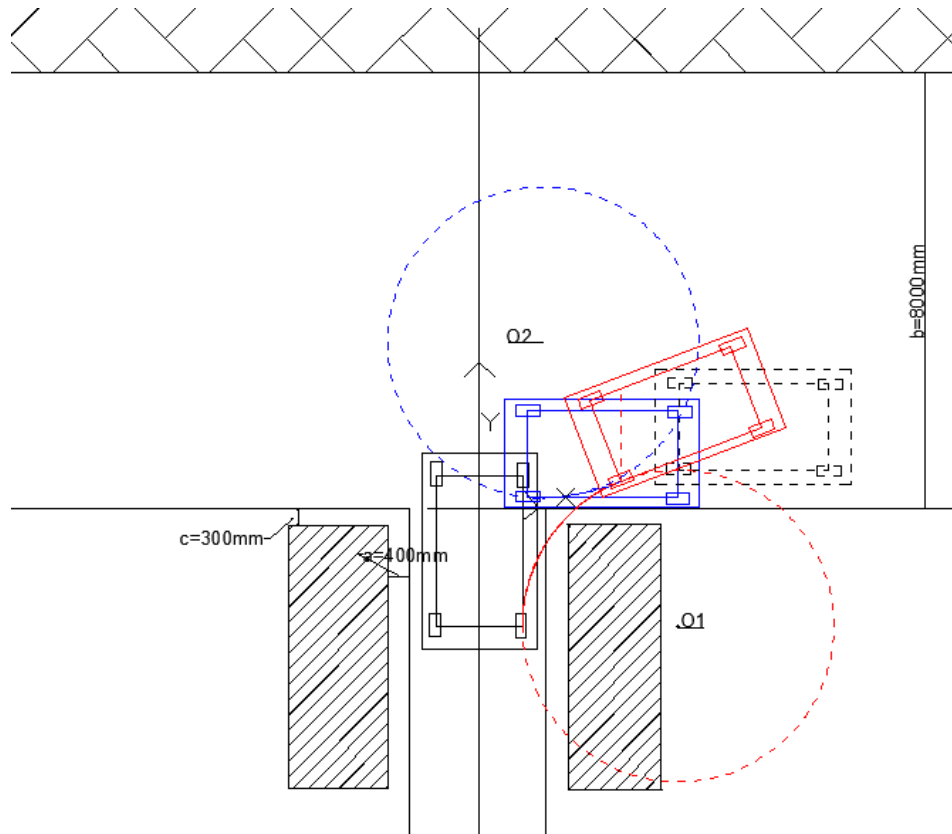


图 9 汽车位于理想停车起始点之下时的行车路径

如图 9 所示，当汽车的起始位置纵坐标 $-174.5 \leq y_0 < y_{r0}$ ，汽车需要先进或后退至唯一理想停车起始点 $s_0(x_0, y_0)$ ，再通过向左转最大转角 $\varphi = 37^\circ$ 时前进至最短路径中圆弧相切再按最短路径倒车时，才会使 $L_1 + L_2$ 最短。又由于此时前进和后退的转角大小都为最大转角 $\varphi = 37^\circ$ ，所以如图 10 所示，前进行车轨迹的半径与后退行车的半径都为 R_{r0} ，而且 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ，所以前进路径长度 L_1 加后退路径长度 L_2 的长度同样为 $\frac{1}{4}$ 圆的周长。

我们可以得到关系式：

$$\begin{cases} x_0 + 2R_{r0} \sin \alpha - R_{r0} = \frac{W_r}{2} \\ y_0 + R_{r0} - 2R_{r0} \cos \alpha = y_{r0} - R_{r0} \end{cases}$$

联立以上两式，得到：

$$\left(x_0 - R_{r0} - \frac{W_r}{2}\right)^2 + (y_0 + 2R_{r0} - y_{r0})^2 = 4R_{r0}^2$$

通过以上式子，只要知道汽车起始位置的纵坐标 y_0 ，就可求出其理想停车起始点 $s_0(x_0, y_0)$ 。

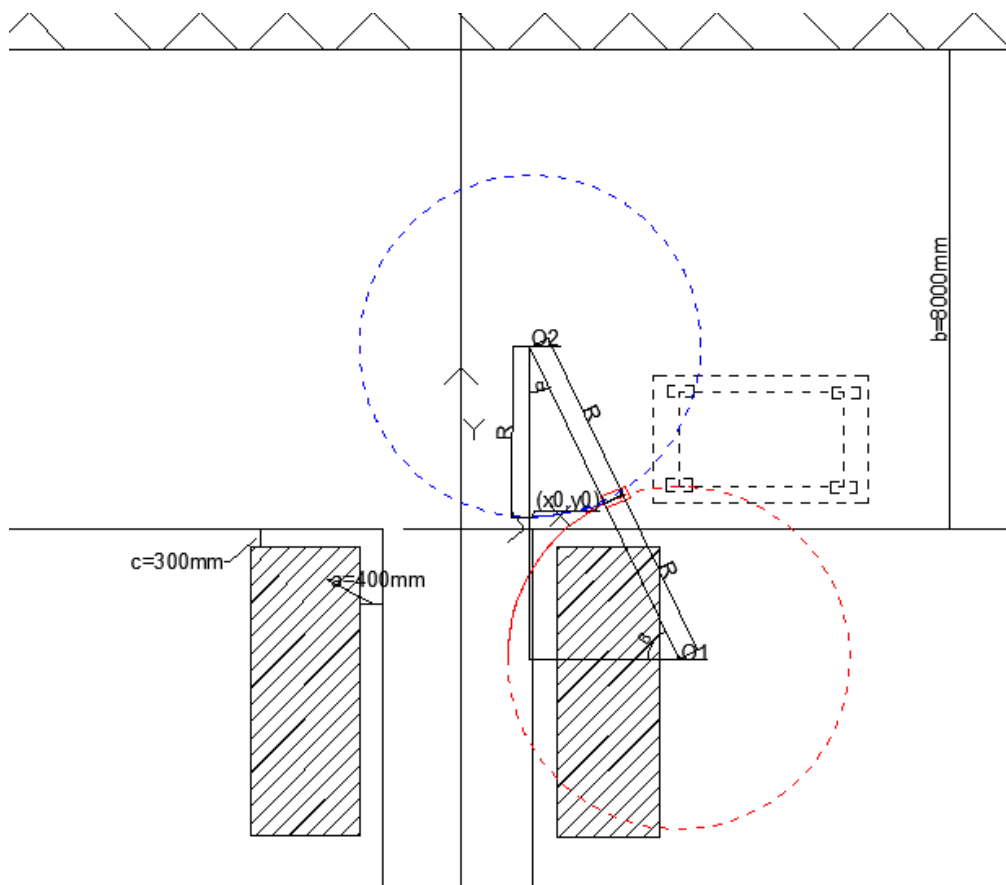


图 10 汽车位于理想停车起始点之下时的行车路径长度关系

3. 当汽车的右后轮起始位置纵坐标 $y_{r0} < y_0 \leq 6286.5$ ，即 $696.6870 \leq y_0 \leq 4769.63$ 时。

如图 11 所示，当汽车的起始位置纵坐标 $y_{r0} < y_0 \leq 6286.5$ ，即 $696.6870 \leq y_0 \leq 4769.63$ 时，汽车的起始位置纵坐标已经超过最短停车路径轨迹的顶点，汽车无论如何行驶都无法前进到与最短停车路径轨迹重合的地方开始倒车，所以在这种情况下，汽车是在理想停车起始点 $s_0(x_0, y_0)$ 直接倒车 $\frac{1}{4}$ 圆至车身与理想停车终点所在垂直方向直线重合时可使 $L_1 + L_2$ 最短，同时能使 $L = L_1 + L_2 + L_3$ 最小。

通过作图分析，可知这种情况下，将最短路径中的倒车 $\frac{1}{4}$ 圆路径向上平移即可。所以当汽车的起始位置纵坐标 $y_{r0} < y_0 \leq 6286.5$ ，即 $696.6870 \leq y_0 \leq 4769.63$ 时，汽车理想停车起始点为 $s_0(3551.687, y_0)$

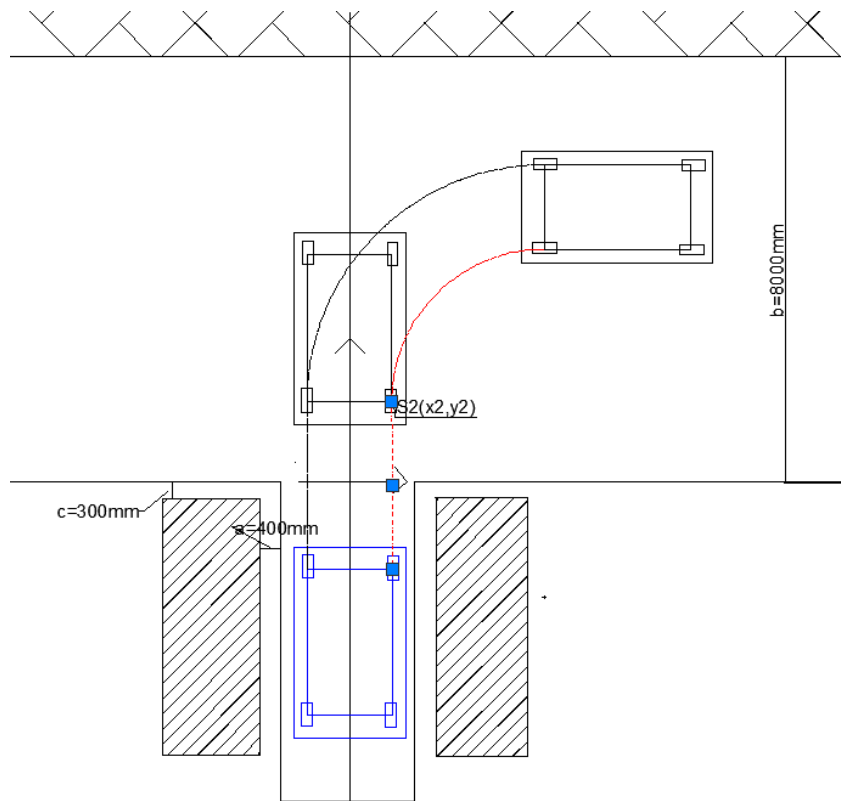


图 11 汽车位于理想停车起始点之上时的行车路径

5.2 问题二

5.2.1 模型的建立

1. 求没有 a, b, c 条件下中停车最短路径及其对应理想停车起始点。

由于问题二并未给出 a, b, c 这三个约束条件，所以在问题二中，求最短路径时，我们不能越过车库以外。因为第一问中求得的最短路径是以 a, c 为边界的，所以第一问中的理想停车起始点在此问并不适用，所以需要一个新的理想起始点。又因为将前进转角和后退转角定为最大转角 $\varphi = 37^\circ$ 时，可使 $L_1 + L_2$ 最短，同时能使 $L = L_1 + L_2 + L_3$ 最小。所以此时转弯半径与第一问中最短路径转弯半径也一样，所以只需将第一问中的最短路径下的理想停车起始点水平上移即可。如图 12 所示，使得倒车所形成的弧线与车库边界的夹角相切时，使汽车倒车至车身与车位在同一直线上后，与理想停车终点距离最短，即 L_3 最小，采用这种停车方式时，当倒车至车身恰好与车位在同一直线，后轮位置为 $s_2(x_2, y_2)$ ，则 L_3 最小为 $L_{3min} = y_2 - y_3$ 。

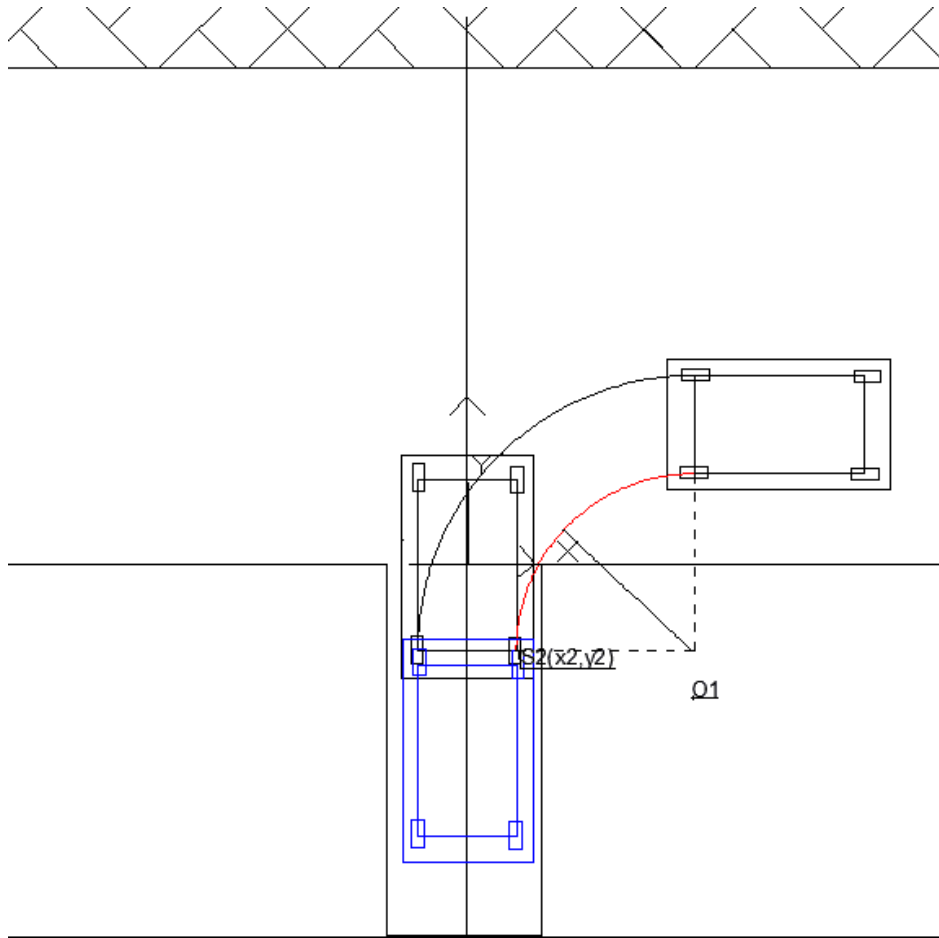


图 12 无a,c区域时汽车最短停车路径

通过计算得到此时理想停车起始点为后轮在 (3151.687, 996.6870)

2. 确定 y_0 的上限与下限。

由于问题二并未给出 b 值，所以这里可以不用考虑上限。

对于下限，在问题一中已经提到，汽车至少离下边界 30mm，所以 y_0 最小为 155.5。

5.2.2 模型的求解

如图 13 所示，理想停车起始点下汽车右后轮位置为(3151.687, 996.6870)。

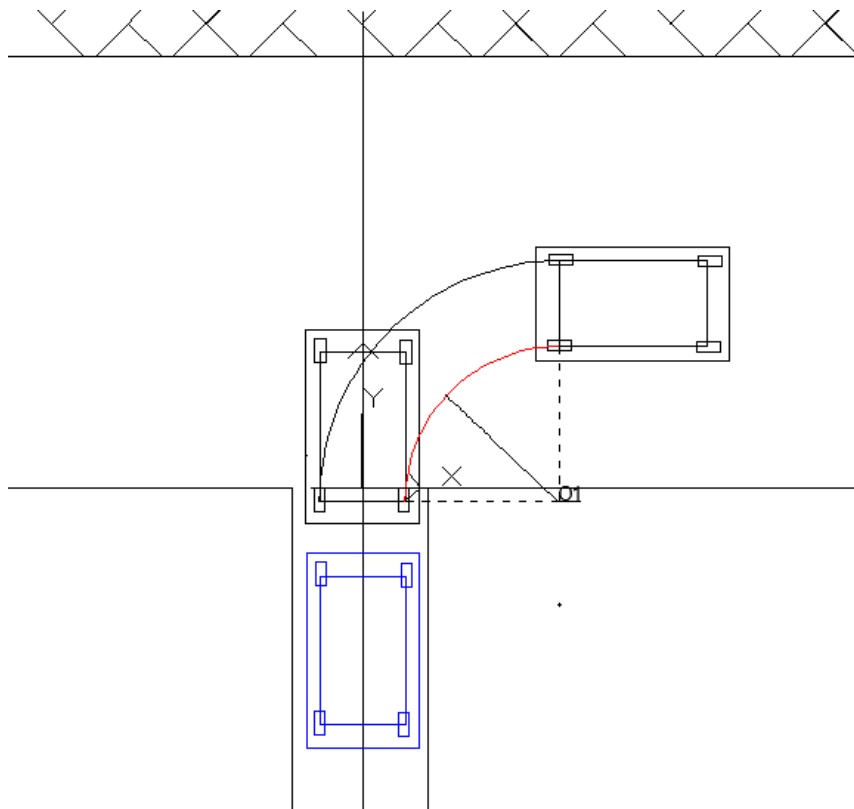


图 13 最短停车路径下汽车的位置

在可行的纵坐标区域里面选出将其代 5. 1. 2 中求停车总路径的公式, 计算这些纵坐标从理想停车起始点出发的路径长度, 可得到不同 y_0 下的停车路径长度。如图 14 摘录了从小到大 6 个不同纵坐标理想停车起始点下的停车策略。

坐标 (x,y)	方向盘转角(°)	$\alpha(^{\circ})$	$\beta(^{\circ})$	路径长度 (mm)
(3551.687,2196.687)	37	0	90	8201.52
(3551.687,4196.687)	37	0	90	10201.52
(3551.687,5696.687)	37	0	90	11701.52
(2151.237,996.687)	37	74.8	15.2	7201.52
(1822.885,896.687)	37	71.3	18.7	7201.52
(2585.348,1096.687)	37	79.2	10.8	7201.52

图 14 6 个不同纵坐标理想停车起始点下的停车策略

六、模型的评价与改进

6.1 模型的评价

1. 模型优点

- 1) 利用 CAD 实时模拟汽车实时行驶情况，合理限制汽车行驶范围。
- 2) 数形结合对汽车倒车进行分析，使倒车过程清晰，运算结果准确。
- 3) 运用较为简单的数学方法，通俗易懂。
- 4) 利用 MATLAB 对函数进行运算，使结果具有很高的准确性。

2. 模型缺点

- 1) 受限于“一进两退”的停车方法，对于行驶中的汽车，无法控制其方向。
- 2) 无法避免倒车过程中打滑，后方来车等突发情况，欠缺实际性。

参考文献

参考文献:

- [1]任孝平. 基于阿克曼原理的车式移动机器人运动学建模 [N]. 智能系统学报. 2009-12
- [2]詹德凯. 半自动泊车技术研究. [D] 吉林. 吉林大学. 2014
- [3]高航. 自动垂直泊车方法研究. [D] 中国科学技术大学. 2011
- [4]Ming Feng Hsieh and Ümit Özgüner. A parking algorithm for an autonomous vehicle [R]. Eindhoven University of Technology. 2008

附录

附录一

根据所给公式，计算出 Y_r ， R_r 的值

$\theta = 37 \times \pi / 180$;

$A = 2750$; $w_r = 1588$; $c = 300$; $v_w = 1839$; $s_l = 2500$; $a = 400$;

$R_r = A \times \cot(\theta) - w_r / 2$;

$Y_r = A \times \cot(\theta) - w_r / 2 - c - \sqrt{(A \times \cot(\theta) - v_w / 2)^2 - (A \times \cot(\theta) - (s_l + 2 \times a) / 2)^2}$;

R_r

Y_r

运行结果:

$R_r =$

2.8554e+003

$Y_r =$

696.6870

附录二

画出理想起始点所连曲线

$w_r=1588; R=2855.373; Y_r=696.687;$

$\text{ezplot}(' (w_r/2+R-x)^2+(y+2*R-Y_r)^2-4*R^2', [w_r/2-R, R+w_r/2, w_r/2, Y_r])$

