

B1 自动倒车策略

姓名	学号	专业
朱宗祥	20142130	信息与计算科学
甘锐	2014213028	信息与计算科学
何静	2014213035	信息与计算科学

摘要

本文针对自动泊车系统的研究，在考虑系统控制容易性的情况下，参考生活中人工入库的实际情况，对整个“一进二退”倒车过程车辆运动规律进行分析之后，运用了几何学相关知识求出了车辆在各段泊车的位置，得出了泊车原始起点坐标范围，并根据车辆泊车停靠位置的合理性及安全性，列出约束条件，通过构建模型，解决了安全倒车入库的起始点位置问题和最佳泊车策略问题，并运用了 Matlab 软件对模型进行求解。

针对问题一，考虑到汽车参数复杂性及汽车泊车过程受到的影响因素，忽略汽车边界的轮廓形状，先对车身和车位建立简化模型，将车身简化为前轮可以自由转动的矩形刚体。分析汽车泊车转弯的几何学特性，将汽车倒车入库的过程划分为三个阶段，在满足实际泊车约束条件的情况下采用三段垂直泊车方式，列出约束条件，基于阿克曼转向几何建立汽车运动学模型，通过计算三段垂直泊车过程临界值并采用数形结合的方法对模型进行求解，得到求出汽车能够安全入库的原始起点坐标范围。在汽车距离通道较近的情况下不能进行三段式垂直泊车，采用直接倒行垂直泊车路径规划，最终得出：

当汽车与通道上部距离在（565.7 mm，4070.4 mm）时，采用三段垂直倒车方式，理想起始点的方程为：

$$(x_0 - 11417)^2 + (y_0 + 10.1)^2 = 1.21 \times 10^8, y_0 \in (7485.2, 10989.9)$$

当汽车与通道上部距离在（4515.3 mm，5861mm）时，能够直接垂直倒车入库到泊车终点，理想起始点的轨迹方程为：

$$x_0 = y_0^2 - 12000y_0 + 3.6007 \times 10^7, y_0 \in (10989.9, 11780.5)$$

当 W 在其他范围时，汽车难以安全入库到理想的泊车终点。

针对问题二，题目要求设计出给出由理想起始点到倒车入库的泊车策略，并求出采用泊车策略时的车速、前轮转角和后轮行驶距离。应该在汽车能够安全倒车入库并停在最恰当位置的前提下寻求满足后轮行驶距离最短的最佳泊车策略，汽车在倒车过程中，车速为定值，经查阅资料得，汽车在泊车时，车速不能超过 5km/h，应考虑汽车出库和入库时行驶方便，汽车后轮行驶的距离越小越好，汽车耗能越低，求出最佳的泊车路线和最佳的前轮转角，汽车整个过程行驶的距离为：

$$l = R + y_3 - (P_2 \cdot y - \sqrt{(R_2 - \frac{w_v}{2} - \sigma_2)^2 - (R_2 - \frac{P_2 \cdot x - P_1 \cdot x}{2})^2}), R = R_1 = R_2$$

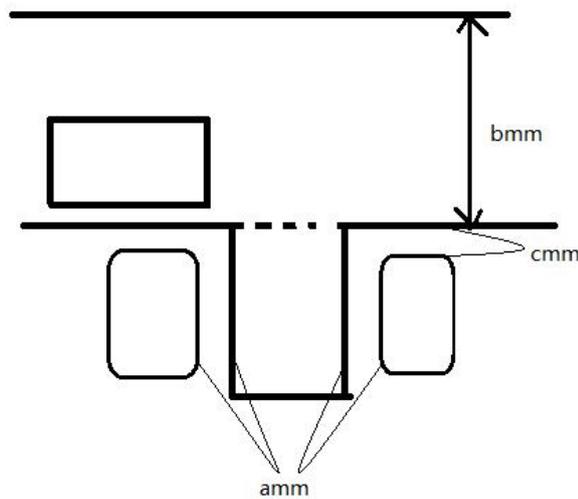
发现当 R2 取最小值 5.5m 时，两种情况下有最小距离值，求得此时后轮行驶距离为：1964.1mm。

关键词：阿克曼运动学模型 matlab 路径规划 自动垂直泊车 数形结合

一、 问题重述

若考虑系统控制容易性，参考人工倒车入库，当车辆位于与车位垂直的任意位置时，先通过前行或后退到达理想停车起始点后，再确定前进转角和后退转角，使车身与车位在同一直线上后，直接倒车完成入库，即“一进二退”两段式倒车模式。

考虑别克汽车公司的昂科威，长 4667mm，宽 1839mm，高度 1694 mm，轴距 2750mm，前轮距 1584 mm，后轮距 1588 mm，目标车库为小型汽车库尺寸大小长 6m，宽 2.5m，高度 2.8m，车库周围情况如图。



(1) 在 $a=400\text{mm}$ ， $b=8000\text{mm}$ ， $c=300\text{mm}$ 的情况下建立模型，按照车辆与车位之间的距离把车辆位置进行分组，给出每一组对应的倒车理想起始点。

(2) 建立模型，给出由理想起始点到倒车入库的泊车策略，包括车速、前轮转角、后轮行驶距离。

二、 问题分析

问题一：属于几何数学问题，考虑到汽车参数复杂性及汽车泊车过程受到的影响因素，先对车身和车位建立简化模型，忽略汽车边界的轮廓形状，将车身简化为前轮可以自由转动的矩形刚体。再基于阿克曼转向几何建立汽车运动学模型，分析汽车泊车转弯的几何学特性，在满足实际泊车约束条件的情况下采用三段垂直泊车方式，通过计算三段垂直泊车过程临界值得到原始起点坐标范围。

问题二：由理想起始点到倒车入库的泊车策略，包括车速、前轮转角、后轮行驶

距离。要求出两种倒车模式下的泊车策略，考虑到在实际倒车过程中，即在问题一汽车安全入库的基础上寻求停车位置的优化方案。求解时，汽车在倒车过程中，车速为定值，经查阅资料得，汽车在泊车时，车速不能超过 5km/h, 应考虑汽车出库和入库时行驶方便，汽车后轮行驶的距离越小越好，汽车耗能越低，求出最佳的泊车路线和最佳的前轮转角。

二、模型假设与符号说明

一、模型假设

- (1) 假设题目所给数据真实可靠
- (2) 假设汽车系统容易控制
- (3) 假设汽车倒车过程中不产生滑动
- (4) 假设汽车在刚开进车道时是与车道平行的

二、符号说明

符号	意义	单位
lv	汽车的长度	mm
wv	汽车的宽度	mm
hf	汽车前悬	mm
hr	汽车后悬	mm
hm	汽车轴距	mm
tf	汽车的前轮距	mm
tr	汽车的后轮距	mm
ls	车位的长度	mm

ws	车位的宽度	mm
P	车位四个角点	
V	车身四个顶点	
O	后周中心对应的转弯圆心	
R	后轴中心轨迹对应的转弯半径	
L	通车道边线	
φ	前轴中心转角	rad

二、 模型建立与求解

4.1 问题一的模型建立与求解

4.1.1 建立车身和车位简化模型

在泊车过程中，静态参数如车身尺寸大小和轴轮构造，直接影响垂直泊车路径；动态参数如加速度性能和速度控制精度影响路径跟踪，泊车环境参数如车位的大小，有无障碍，路面摩擦系数等。为了便于控制泊车约束条件，先简化汽车模型，忽略汽车边界的轮廓形状，只考虑与运动相关的特性，将车身简化为前轮可自由转向的矩形刚体，如图 1.1, 1.2 所示：

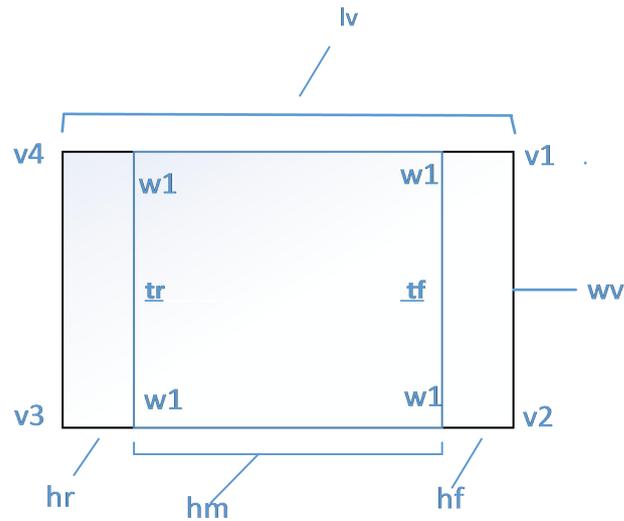


图 1.1

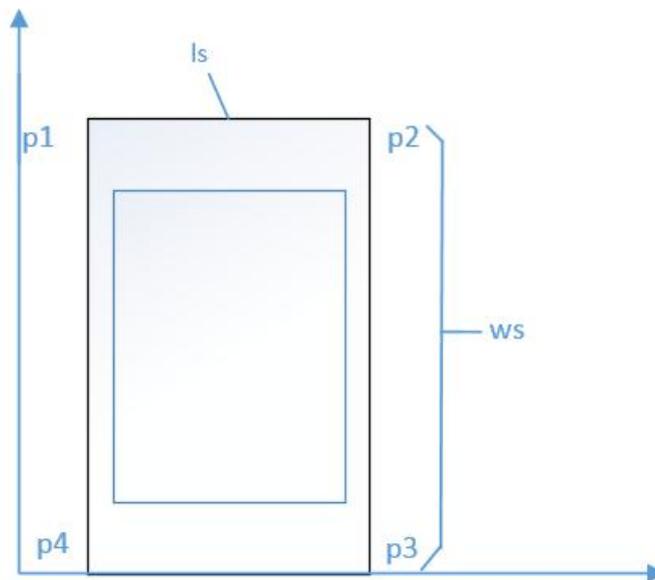


图 1.2

4.1.2 建立汽车运动学模型

汽车运动学模型一般基于阿克曼转向几何[1]建立，依据阿克曼转向几何设计的车辆，沿着弯道转弯时，利用四连杆的相等曲柄使内侧轮的转向角比外侧轮大大约 $2^{\circ} - 4^{\circ}$ ，使四个轮子路径的圆心大致上交汇于后轴的延长线上瞬时转向中心，这样的设计避免了汽车转向时，路面对汽车产生的附加阻力以及轮胎的过快磨损，转向系统能保证汽车在转向过程中，所有车轮均作纯运动顺畅的转弯。按照《汽车库建筑设计规范 JGJ100-98》[2]，此昂科威汽车最小转弯半径为 5.5m，因此采用三段垂直泊车路径规划，仿真结果如图 1.3 所示。

基于阿克曼转向几何的运动学模型，前轴中心转角为 φ ，则后轴中心对应的转弯

$$\text{半径为: } R = \frac{l}{\sin \varphi} \quad (4-3)$$

经查阅资料得， φ 的最大值为 30° ，所以可求得最小半径为： $R_m = \frac{l}{\varphi_{\max}}$

为了方便考虑，假设汽车一直以相同的角度转弯，且转弯角度为 30° ，以后的半径也都这样取值。

当汽车以最小半径由 S_2 到 S_1 转过 90° 与车道平行时，此时为临界状态，计算出此时汽车距离 L_1 的值 W_m ，即为汽车两种倒车模式的临界点

$$W_m = R_2 - \frac{l_v}{2} - (S - S_3 \cdot y) \quad (4-4)$$

安全距离定为 300mm 是能够使汽车安全入库的，计算得到 $W_m = 4070.4\text{ mm}$ ，接下来给出计算倒车模式一（ $W < W_m$ ）和倒车模式二（ $W > W_m$ ）两种情况下的倒车理想起始点的算法。

4.1.4 三段垂直泊车路径规划

当 $W < W_m$ 时，汽车一进二退倒进车库，倒车过程为

V_1 的转弯半径为：

$$R_{2V_1} = \sqrt{(l_v - h_r)^2 + (R_2 + \frac{W_v}{2})^2} \quad (4-5)$$

所以 V_1 轨迹的参数方程为：

$$\begin{cases} x = O_2 \cdot x - R_{2V_1} \cos(\theta_2 + \phi) \\ y = O_2 \cdot y + R_{2V_1} \sin(\theta_2 + \phi) \end{cases}, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (4-6)$$

其中 ϕ 是 V_1 以 O_2 为旋转中心领先 S_3 的相位：

$$\phi = \arcsin\left(\frac{l_v - h_s}{R_{2V_1}}\right) \quad (4-7)$$

当汽车出库行驶到 S_1 时， V_1 不能碰到 L_2 ，即有约束：

$$V_1 \cdot y \leq L_2 \cdot y - \sigma_3 \quad (4-8)$$

可以解出转角 θ_2 的取值范围:

$$\theta_2 \leq \arcsin\left(\frac{L_2 \cdot y - \sigma_3 - O_2 \cdot y}{R_{2V_1}}\right) - \phi \quad (4-9)$$

V_4 的转弯半径为:

$$R_{2V_4} = \sqrt{h_r^2 + \left(R_2 + \frac{w_v}{2}\right)^2} \quad (4-10)$$

所以 V_4 轨迹的参数方程为:

$$\begin{cases} x = O_2 \cdot x - R_{2V_4} \cos(\theta_2 + \phi) \\ y = O_2 \cdot y + R_{2V_4} \sin(\theta_2 + \phi) \end{cases}, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (4-11)$$

其中 ϕ 是 V_4 以 O_2 为旋转中心领先 S_2 的相位:

$$\phi = \arcsin\left(\frac{l_v - h_s}{R_{2V_1}}\right) \quad (4-12)$$

在汽车由 S_3 驶向 S_2 的过程中, V_4 不能碰撞到车位边线 $P1P4$, 因此有以下约束:

$$V_4 \cdot x \geq l_v + a \quad (4-13)$$

根据上面不等式, 可以解出转角 θ_2 的取值范围:

$$\theta_2 \geq \arccos\left(\frac{O_2 \cdot x - a - l_v}{R_{2V_4}}\right) \quad (4-14)$$

从 S_1 到 S_0 的过程中, V_3 不能碰撞到车道边线 $L1$, 且满足安全距离, 此时得

$O1$ 的临界值:

$$\begin{aligned} O_1 \cdot y &= R_{1V_3} + \sigma_4 + L_1 \cdot y \\ R_{1V_3} &= \sqrt{\left(R_1 + \frac{l_v}{2}\right)^2 + h_r^2} \end{aligned}$$

$$x_0 = x_{10} \quad y_0 = y_{10} - R_2$$

而 S_0 的坐标可以表示为:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_{20} - (R_1 + R_2) \cos \nu \theta_2 \\y_0 &= y_{20} - (R_1 + R_2) \sin \nu \theta_2\end{aligned}$$

根据上面的几个不等式可以计算出 S0 纵坐标和横坐标的取值范围，得到 y0 的范围是：[7485.2mm, 10989.9mm]

现考虑理想起始点 S0 的轨迹方程，|O1O2|=R1+R2，O1: (x0, y0+R2) O2: (x2+R2, y2), 所以得到方程：

$$(x_0 - (x_2 + R_2))^2 + (y_0 + R_2 - y_2)^2 = (R_1 + R_2)^2$$

计算得到 S0 的轨迹方程为：

$$(x_0 - 11417)^2 + (y_0 + 10.1)^2 = 1.21 \times 10^8$$

y0 属于 [7485.2 mm, 10989.9mm]

此时 S1 点的坐标是：

$$\begin{cases} A_2.x = A_3.x + R_2 - R_2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{O_1.y - A_3.y}{R_1 + R_2}\right)^2} \\ A_2.y = A_3.y + R_2 \cdot \frac{O_1.y - A_3.y}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

S0 的坐标是：

$$\begin{cases} A_1.x = A_2.x - R_1 \sqrt{1 - \left(\frac{O_1.y - A_3.y}{R_1 + R_2}\right)^2} \\ A_1.y = \sqrt{\left(R_1 + \frac{w_r}{2}\right)^2 + h_r^2} + \delta_4 + L_1.y - R_1 \end{cases}$$

4.1.5 直接倒行垂直泊车路径规划

如图所示，直接倒行垂直泊车过程是：从 S0 点开始，以 O1 为圆心，R1 为半径，倒车行驶到 S1 点，然后回正方向，直线倒车到 S2。泊车过程中需要在 S1 点改变方向盘转角，其他路段均连续行驶。

泊车终点 S2 与 S1 与三段倒车模式相同，其中 S2 点即为三段垂直倒车的 S3

点，S1 点即为三段垂直倒车的 S2 点，由于直接垂直倒车模式简单，若确定了唯一的前轮转角，则最终求得理想起始点是一个点，所以不妨考虑多个转角情况下的理想起始点，根据相关资料查得这种汽车的最小转弯半径为 5.5m，所以最

大前轮转角为 30 度，设前轮转角为 ϑ ，所以 $R_1 = \frac{l}{\sin \varphi}$ ，根据相关资料，设定

转角范围为 20 度到 30 度之间。

S2 点的坐标：

$$\begin{cases} x_2 = \frac{P_1 \cdot x + P_2 \cdot x}{2} \\ y_2 = P_2 \cdot y - c - h_m - h_f \end{cases}$$

S1 点的坐标：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{P_1 \cdot x + P_2 \cdot x}{2} \\ y_1 = P_2 \cdot y - \sqrt{\left(R_2 - \frac{w_v}{2} - \sigma_2\right)^2 - \left(R_2 - \frac{P_2 \cdot x - P_1 \cdot x}{2}\right)^2} \end{cases}$$

所以 O1 的坐标为：

$$\begin{cases} x_{10} = x_1 + R_2 \\ y_{10} = y_1 \end{cases}$$

汽车由 S2 点开始直线行驶至 S1，从 S1 点开始转弯，转过 90 度至 S0 与车道平行，那么此时的 S0 点即为理想的起始点，得到此时期望的 S0 坐标为：

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + \frac{h_m}{\sin \vartheta} \\ y_0 = y_1 + \frac{h_m}{\sin \vartheta} \end{cases}$$

计算得到 S0 轨迹方程为：

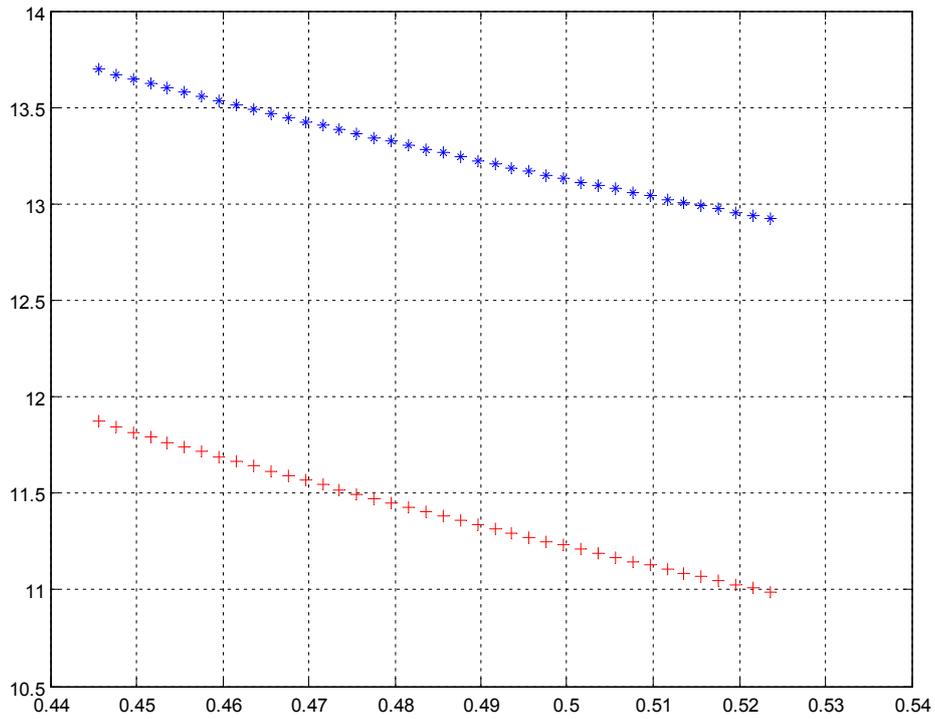
$$(x_0 - 7167)^2 - (x_0 - 7166.5)^2 + (y_0 - 6000)^2 = 0$$

简化得：

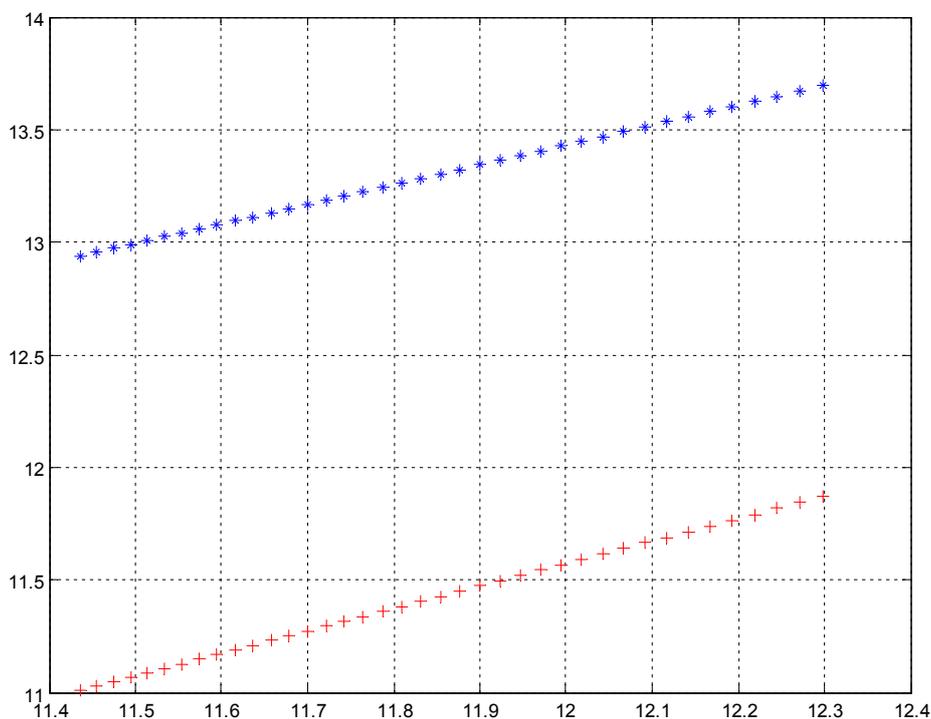
$$x = y^2 - 12000y + 3.6007 \times 10^7$$

当前轮转角取 30 度时，有最小半径，此时 y_0 的下限为 8488.9。当前轮转角越来越小，半径越来越大，需要考虑到汽车顶点 v_1 不能碰撞到 L2，且在安全距离之内，当恰好为安全距离时，取得 y_0 上限，也就是前轮转角最小值，此时 y_0 求得为：11780.5mm

第二组理想起始点的 y 坐标与汽车前轮转角的函数关系图像



第二组理想起始点的 x 坐标与 y 坐标的函数关系图像



4.1.6 总结

至此，问题一中的两组情况下理想起始点已求出，

当 $565.7 \text{ mm} < W < 4070.4 \text{ mm}$ 时，需要三段垂直倒车，理想起始点的的方程为：

$$(x_0 - 11417)^2 + (y_0 + 10.1)^2 = 1.21 \times 10^8, y_0 \in (7485.2, 10989.9)$$

当 $4515.3 \text{ mm} < W < 5861 \text{ mm}$ 时，能够直接垂直倒车入库到大理行泊车终点，理想起始点的轨迹方程为：

$$x_0 = y_0^2 - 12000y_0 + 3.6007 \times 10^7, y_0 \in (10989.9, 11780.5)$$

当 W 在其他范围时，汽车难以安全入库到理想的泊车终点。

4.2 问题二的模型建立与求解

为了方便考虑，先考虑后轮中心行驶距离，当后轮中心行驶距离最小时，左后轮和右后轮行驶距离就最小。

考虑三段垂直倒车，汽车从 S_0 入库到 S_1 ，后轮中心行驶的距离为：

$$l_1 = R_1 \times \theta_1$$

S_1 入库到 S_2 ，后轮中心行驶的距离为： $l_2 = R_2 \times \theta_2$

S_2 到 S_3 行驶距离为 $l_3 = y_3 - y_2$

所以最终行驶距离为： $l = R + y_3 - (P_2 \cdot y - \sqrt{(R_2 - \frac{w_v}{2} - \sigma_2)^2 - (R_2 - \frac{P_2 \cdot x - P_1 \cdot x}{2})^2})$

同理，考虑二段垂直倒车，汽车整个过程行驶的距离为：

$$l = R + y_3 - (P_2 \cdot y - \sqrt{(R_2 - \frac{w_v}{2} - \sigma_2)^2 - (R_2 - \frac{P_2 \cdot x - P_1 \cdot x}{2})^2}), \quad R = R_1 = R_2$$

分析距离表达式，发现当 R_2 取最小值 5.5m 时，两种情况下有最小距离值，求得此时后轮行驶距离为：1964.1mm

五、模型评价与推广

自动泊车系统垂直泊车难度比平行泊车大，本文致力于研究垂直泊车解决方案，本文首先对汽车模型进行简化，忽略侧移且低速运动情况下基于阿克曼转向几何建立汽车运动学模型，参考车位及通车道国家标准采用三段垂直泊车方案和直接垂直倒车入库方案，使用 MATLAB 软件对问题进行求解。由于时间限制本文研究仍有不少改进之处，而本文作为自动垂直泊车系统研究的基础对自动泊车的验证提供了一些经验。

六、参考文献

[1]任孝平,蔡志兴.基于阿克曼原理的车氏移动机器人运动学建模[J].智能系统学报,2009,4(6):534-537.

[2] 汽车库建筑设计规范 JGJ100-98

[3]汽车前悬,后悬调查:

<http://club.autohome.com.cn/bbs/thread-c-3554-48816648-1.html>.2016-8-20

三、附录

limitvalue_1 程序:

```
clc;clear all;
```

```
% 三段垂直泊车和两段垂直泊车的临界位置
```

```
lv=4.667;wv=1.839;hm=2.75;hf=0.996;hr=0.921;a=0.4;b=8;c=0.3;
```

```
%% 根据车库停车要求,找到S3的合理位置;
```

```
%%% P1的坐标(x1,y1),P2的坐标(x2,y2),P3的坐标(x3,0),P4的坐标(x4,0)
```

```

x1=4.667;y1=6;x2=7.167;y2=6;x3=7.167;x4=4.667;
S2_x=(x1+x2)/2;S2_y=6-c+hr-lv;
%% 根据倒车路线13确定S2的位置,安全距离e=0.3,最小转弯半径r=5.5;
S1_x=(x1+x2)/2;
S1_y=y2-sqrt((5.5-wv/2-0.3)^2-(5.5-(x2-x1)/2)^2);
%% 根据倒车路线12确定S1的位置,预先知道12的旋转角为90°
O2_x=S1_x+5.5;O2_y=S1_y;flag=0;
rv4=sqrt(hr^2+(5.5+wv/2)^2);
rv1=sqrt((lv-hr)^2+(5.5+wv/2)^2);
if rv4<=S1_x+5.5-x1-0.3/2 && rv1+O2_y+0.3<=14    %约束条件
    flag=1;
end
S0_x=O2_x;S0_y=O2_y+5.5;
flag,S0_x,S0_y

```

darw_2 程序:

```

clc;clear all;
%画出第二组理想起始点的 y 坐标与汽车前轮转角的函数关系
%%直接倒行垂直泊车路径中 S1 的坐标可见 limitvalue_1
lv=4.667;wv=1.839;hm=2.75;hr=0.921;x1=4.667;S1_x=5.9170;S1_y=5.4899;
x=[pi/6];y1=[10.9899];y2=[12.9224];
angle=pi/6;flag=1;
while flag==1
    angle=angle-0.002;
    R=hm/sin(angle);
    rv4=sqrt(hr^2+(R+wv/2)^2);
    pq=sqrt((lv-hr)^2+(R+wv/2)^2)+S1_y;
    S0_y=S1_y+R;
    if rv4<=S1_x+R-x1-0.3/2 && pq+0.3<=14
        x=[x angle];y1=[y1 S0_y];y2=[y2 pq];flag=1;
    else
        flag=0;
    end
end
plot(x,y1,'r',x,y2,'*')
grid on

```

draw_3 程序:

```

clc;clear all;
%画出第二组理想起始点的 x 坐标与 y 坐标的函数关系
%%直接倒行垂直泊车路径中 S1 的坐标可见 limitvalue_1
lv=4.667;wv=1.839;hm=2.75;hr=0.921;x1=4.667;S1_x=5.9170;S1_y=5.4899;
x=[];y1=[];y2=[];

```

```

angle=pi/6;flag=1;
while flag==1
    angle=angle-0.002;
    R=hm/sin(angle);
    rv4=sqrt(hr^2+(R+wv/2)^2);
    pq=sqrt((lv-hr)^2+(R+wv/2)^2)+S1_y;
    S0_x=S1_x+R;
    S0_y=S1_y+R;
    if rv4<=S1_x+R-x1-0.3/2 && pq+0.3<=14
        x=[x S0_x];y1=[y1 S0_y];y2=[y2 pq];flag=1;
    else
        flag=0;
    end
end
plot(x,y1,'r+',x,y2,'*')
grid on

```

求解临界点的计算程序:

```

ws =2500;
lv=4667;
ls=6000;
g1=500;
g2=330 ;%cigema 2
g3=300;
g4=500;
a=400;
b=8000;
wv=1839;
hr=921;
r2=2750/sin(pi/6);
r1=r2
x2=ws/2+lv
y2=ls-sqrt((r2-wv/2-g2)^2-(r2-ws/2)^2)
x20=x2+r2
y20=y2
r2v4=sqrt(hr^2+(r2+wv/2)^2);%s2 到 s1 过程
r2v1=sqrt((lv-hr)^2+(r2+wv/2)^2); %s2 到 s1 过程
r1v3 =sqrt((r1+wv/2)^2+hr^2);
f = asin((lv-hr)/r2v1); % fai
f2max = asin((b+ls-g3-y20)/r2v1)-f %v1 不能碰到 L2 得的 sin
f2min = acos((x20-lv-a/2)/r2v4) %v4 不能碰到 P1P4
y0m1=r1v3+g4+ls-r1
x0min=x20-(r1+r2)*cos(f2min)
x0max=x20-(r1+r2)*cos(f2max)

```

$y_{0min}=y_{20}+(r_1+r_2)*\sin(f_{2min})-r_2$

$y_{0max}=y_{20}+(r_1+r_2)*\sin(f_{2max})-r_2$

运行得到:

$r_1 =$

5.5000e+03

$x_2 =$

5917

$y_2 =$

5.9348e+03

$x_{20} =$

11417

$y_{20} =$

5.9348e+03

$f_{2max} =$

1.0426 - 0.2981i

$f_{2min} =$

0.0000 + 0.1412i

$y_{0m1} =$

7.4852e+03

$x_{0min} =$

307.1413

x0max =

5.6249e+03 - 2.8742e+03i

y0min =

4.3481e+02 + 1.5585e+03i

y0max =

1.0361e+04 - 1.6772e+03i

>>