

悬链线在系泊系统设计中的应用

——全国大学生数学建模竞赛2016A题的解答与点评

主讲人： 周义仓 西安交通大学数学与统计学院
zhouyc@mail.xjtu.edu.cn, 029-82668741

主要内容

1. 题目及其背景
2. 悬链线方程推导
3. 问题1和问题2的模型与解答
4. 问题3的模型与解答
5. 离散化的递推模型
6. 竞赛答卷情况综述
7. 对教学的建议

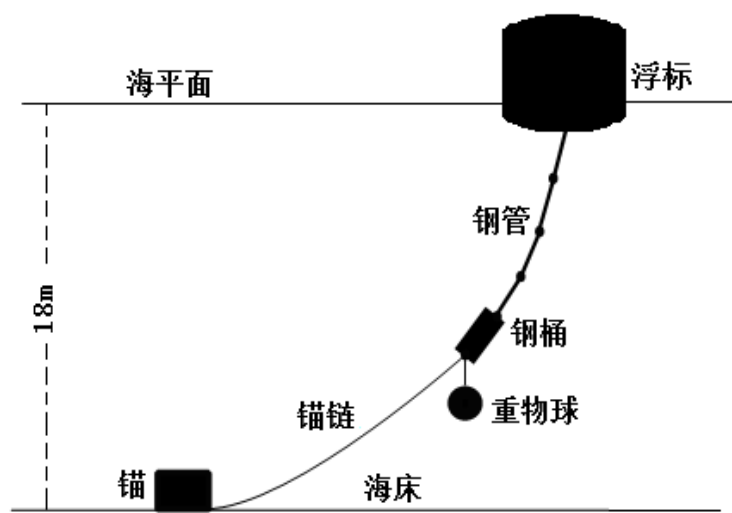
1. 题目及其背景 2016A 系泊系统的设计

近浅海观测网的传输节点由浮标系统、系泊系统和水声通讯系统组成（如图1所示）。某型传输节点的浮标系统可简化为底面直径2m、高2m的圆柱体，浮标的质量为1000kg。系泊系统由钢管、钢桶、重物球、电焊锚链和特制的抗拖移锚组成。锚的质量为600kg，锚链选用无档普通链环，近浅海观测网的常用型号及其参数在附表中列出。钢管共4节，每节长度1m，直径为50mm，每节钢管的质量为10kg。要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过16度，否则锚会被拖行，致使节点移位丢失。水声通讯系统安装在一个长1m、外径30cm的密封圆柱形钢桶内，设备和钢桶总质量为100kg。钢桶上接第4节钢管，下接电焊锚链。钢桶竖直时，水声通讯设备的工作效果最佳。若钢桶倾斜，则影响设备的工作效果。钢桶的倾斜角度（钢桶与竖直线的夹角）超过5度时，设备的工作效果较差。为了控制钢桶的倾斜角度，钢桶与电焊锚链链接处可悬挂重物球。

系泊系统的设计问题就是确定锚链的型号、长度和重物球的质量，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。

问题1 某型传输节点选用II型电焊锚链22.05m，选用的重物球的质量为1200kg。现将该型传输节点布放在水深18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 的海域。若海水静止，分别计算海面风速为12m/s和24m/s时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

问题2 在问题1的假设下，计算海面风速为36m/s时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。请调节重物球的质量，使得钢桶的倾斜角度不超过5度，锚链在锚点与海床的夹角不超过16度。



问题3 由于潮汐等因素的影响，布放海域的实测水深介于16m~20m之间。布放点的海水速度最大可达到1.5m/s、风速最大可达到36m/s。请给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计，分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

说明 近海风荷载可通过近似公式

$F=0.625 \times Sv^2(N)$ 计算，其中 S 为物体在风向法平面的投影面积(m^2)， v 为风速(m/s)。

近海水流力可通过近似公式

$F=374 \times Sv^2(N)$ 计算，其中 S 为物体在水流速度法平面的投影面积(m^2)， v 为水流速度(m/s)。

。

锚链型号和参数表

型号	长度 (mm)	质量 (kg)
I	78	3.2
II	105	7
III	120	12.5
IV	150	19.5
V	180	28.12

长度是指每节链环的长度；
质量时指每米环链的质量

- 应征题目：近浅海海底观测网的组网优化问题，原题是针对某海域试验用海底观测网提出的，需要通过模型设计试验海域中系泊系统和水声通讯系统传输节点的布局；
- 关注的是第三问，问题1和问题2是我们中加的，帮助学生理解问题和形成建模与求解的思路；
- 考察学生理解和简化实际问题的能力，主要用力学知识建立模型，进行求解后给出需要的结果：确定锚链的型号、长度和重物球的质量，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。

题目解答的主要思路

- 通过受力分析建立模型，求解后给出需要的结果。
- 将锚链、钢桶、钢管都简化为柔软的绳索，利用悬挂重物的三段悬链线来解决；
 - 将下部的锚链简化为悬链线，上面的钢桶和钢管分别作为刚体来处理，由力和力矩的平衡条件建立模型；
 - 将每节环链、钢桶和钢管都看作刚体，得到力和力矩的平衡条件，给出离散的递推模型。

2. 悬链线方程的推导

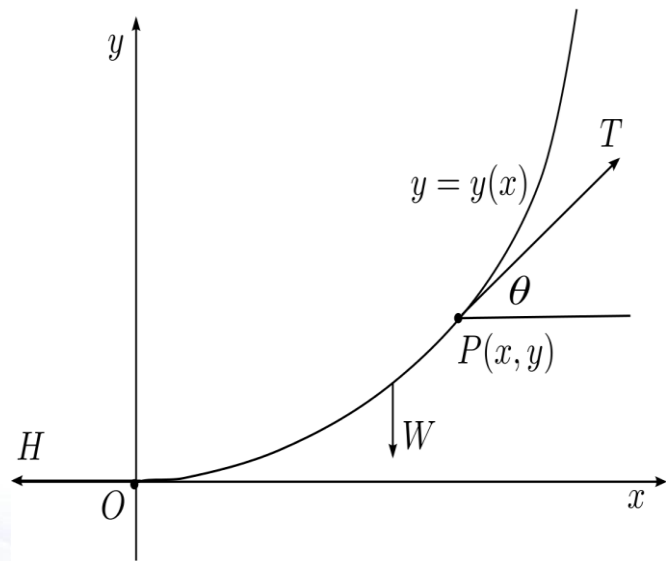
考虑 OP 段悬链线的受力情况

力平衡方程: $T \cos \theta = H$, $T \sin \theta = W$,

$$\tan \theta = \frac{W}{H}, \tan \theta = \frac{dy}{dx}, \quad W = \omega \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\omega}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$y = a \left(\cosh \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right), \quad a = \frac{H}{\omega}$$



考虑 $[x, x + dx]$ 段悬链线的受力情况

在两个方向上的力平衡方程分别为

$$(T + dT) \cos(\theta + d\theta) = T \cos \theta,$$

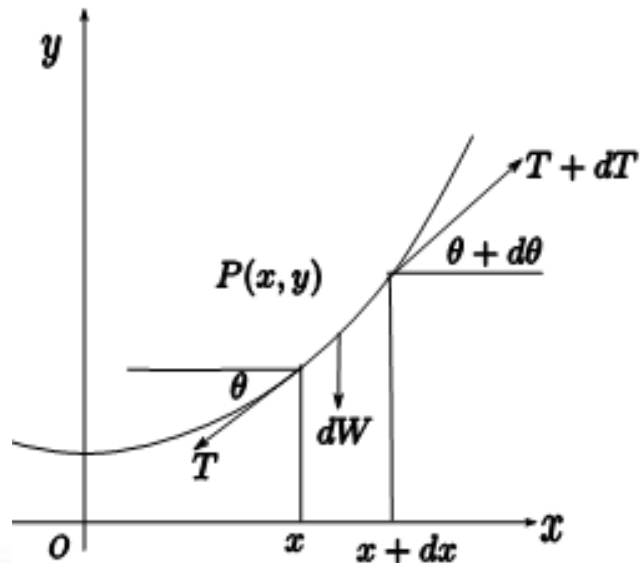
$$(T + dT) \sin(\theta + d\theta) = T \sin \theta + dW,$$

将 $\cos(\theta + d\theta)$, $\sin(\theta + d\theta)$ 展开,

$$dW = \rho(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \quad y' = \tan \theta, \quad y'' = \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\omega(x)}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \tan \theta_0$$

$$y = a \cosh \left(\frac{x - x_0}{a} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_0}{\cos \theta_0} \right) \right) + y_0 - \frac{a}{\cos \theta_0}, \quad a = \frac{H}{\omega}$$



有水流力时的情况：考虑 $[x, x + dx]$ 对应弧段

悬链线的受力情况，记 $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$

在 x 、 y 两个方向上的力平衡方程分别为

$$(T + dT) \cos(\theta + d\theta) = T \cos \theta - f \sin \theta ds,$$

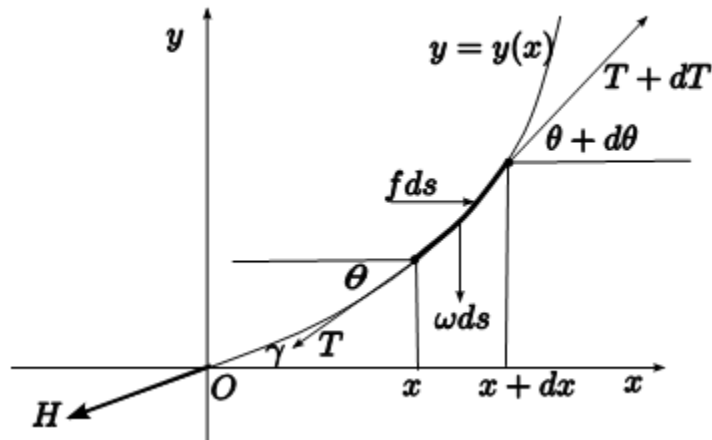
$$(T + dT) \sin(\theta + d\theta) = T \sin \theta + \rho ds.$$

将 $\cos(\theta + d\theta)$, $\sin(\theta + d\theta)$ 展开，整理

$$\frac{dT}{ds} = -f \cos \theta \sin \theta + \rho \sin \theta, \quad T(0) = H,$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{f \sin^2 \theta + \rho \cos \theta}{T}, \quad \theta(0) = \gamma.$$

该方程组没有解析解，可以进行数值求解



$$T_{k+1} = T_k + (-f \cos \theta_k \sin \theta_k + \rho \sin \theta_k) \Delta s_k, \quad T_0 = H,$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{f \sin^2 \theta_k + \rho \cos \theta_k}{T_k} \Delta s_k, \quad \theta_0 = \gamma,$$

$$x_{k+1} = x_k + \cos \theta_k \Delta s_k, \quad x_0 = 0,$$

$$y_{k+1} = y_k + \sin \theta_k \Delta s_k, \quad y_0 = 0.$$

3. 问题1和问题2的模型与求解

常数与浮力: $L=22.05\text{m}$, $m_0=7 \text{ kg/m}$, $m = 1200\text{kg}$,

$m_1=100\text{kg}$, $m_2 = 10\text{kg}$, $H_{water} = 18\text{m}$, $v = 12\text{m/s}$,

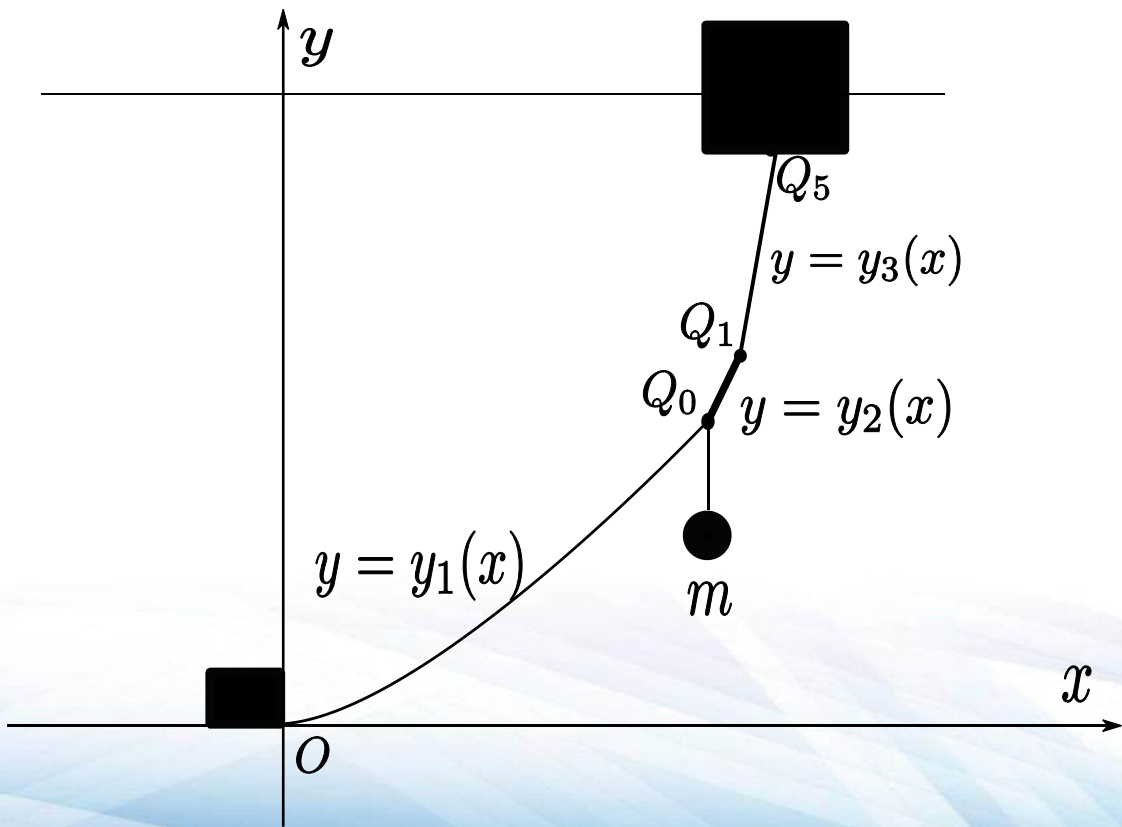
设这些组件是钢材, 比重为 7800kg/m^3 , 则它们在海水中的重量分别为: $w_0=59.59\text{N/m}$,

$w=10214.62\text{N}$, $w_1=269.96\text{N}$, $w_2=85.12\text{N}$

如果这些组件的材料不是钢材, 其建模过程完全相同, 只是计算结果有些差异。

基本思路

将锚链、钢桶和钢管分别看作是单位质量不同的柔软绳索，按照三段挂有重物的悬链线进行建模与计算。



若锚链被全部拉起，在锚点与海床恰好相切，则

浮标所承载的重量： $W_f = 1000 \times 9.8 + L_0 w_0 + w + w_1 + 4w_2$

浮标的吃水深度为： $H_w = \frac{W_f}{3200.13 \times 9.8}$

浮标上的风力大小为： $F = 0.625 \times 2(2 - H_w)v^2$

OQ₀之间悬链线的方程为： $y = y_1(x) = a_1 \left(\cosh\left(\frac{x}{a_1}\right) - 1 \right)$

其中： $a_1 = \frac{F}{w_0} = 3.94$, $y_1(x) = 3.94(\cosh(0.25x) - 1)$

Q_0Q_1 之间第二段悬链线的方程为

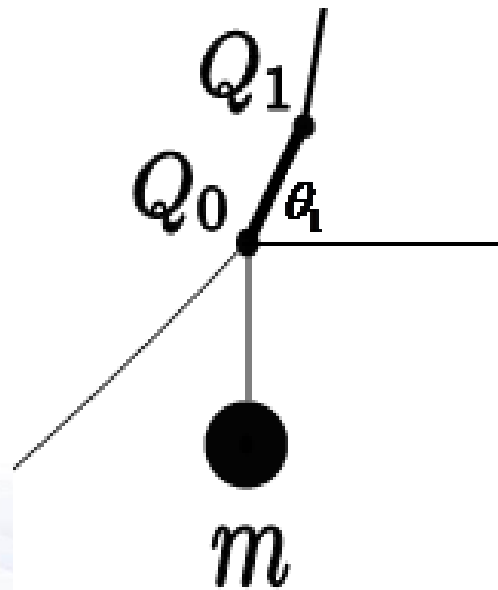
$$y = y_2(x) = a_2 \cosh \left(\frac{x - x_0}{a_2} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_2} \right) \right) + y_1^0 - \frac{a_2}{\cos \theta_1},$$

$$a_2 = \frac{F}{w_1} = 0.87, \quad y_1^0 = y_1(x_0) = a_1 \left(\cosh \left(\frac{x_0}{a_1} \right) - 1 \right)$$

$$\tan \theta_1 = \frac{W_{m_0m}}{F} = \frac{\text{锚链的重量} + \text{重物球的重量}}{\text{风力的大小}} \approx 88.83^\circ$$

这一段悬链线的长度为1米

$$a_2 \sinh \left(\frac{x_1 - x_0}{a_2} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right) \right) - a_2 \sinh \left(\ln \left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right) \right) = 1$$



Q_1Q_5 之间第三段悬链线的方程为

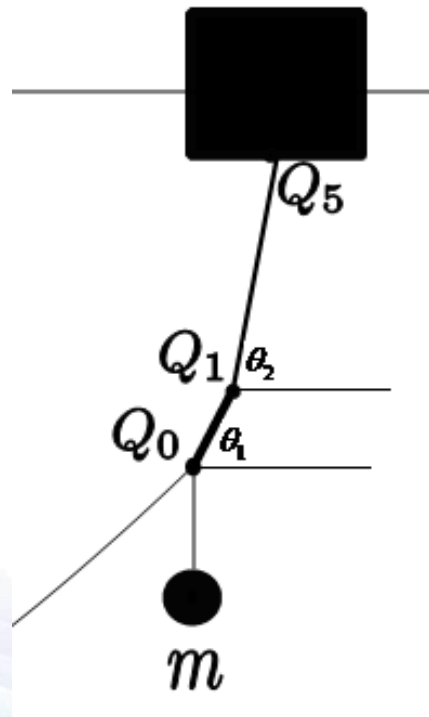
$$y = y_3(x) = a_3 \cosh \left(\frac{x - x_1}{a_3} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \right) + y_2^1 - \frac{a_3}{\cos \theta_2},$$

$$a_3 = 2.76, \quad a_2 = \frac{F}{w_2} = 0.87, \quad y_2^1 = y_2(x_1)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{W_{m_0mm_1}}{F} = \frac{\text{锚链的重量} + \text{球和钢管的重量}}{\text{风力的大小}} \approx 88.86^\circ$$

这一段悬链线的长度为4米

$$a_3 \sinh \left(\frac{x_5 - x_1}{a_3} + \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \right) - a_3 \sinh \left(\ln \left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \right) = 4$$



求解过程

$$y_3(x_5) = 18 - H_w,$$

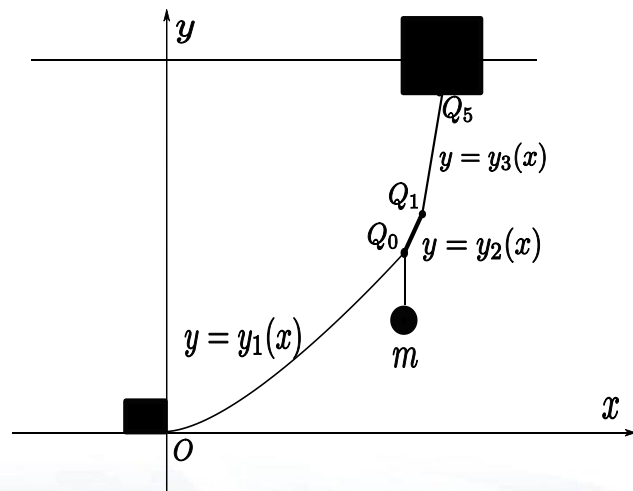
$$a_2 \sinh\left(\frac{x_1 - x_0}{a_2} + \ln\left(\frac{1 + \sin\theta_1}{\cos\theta_1}\right)\right) - a_2 \sinh\left(\ln\left(\frac{1 + \sin\theta_1}{\cos\theta_1}\right)\right) = 1,$$

$$a_3 \sinh\left(\frac{x_5 - x_1}{a_3} + \ln\left(\frac{1 + \sin\theta_2}{\cos\theta_2}\right)\right) - a_3 \sinh\left(\ln\left(\frac{1 + \sin\theta_2}{\cos\theta_2}\right)\right) = 4.$$

求解这一个方程组得到 $x_0 = 8.26$, $x_1 = 8.28$, $x_5 = 8.35$,

再由 $s = a_1 \sinh\left(\frac{x_0}{a_1}\right)$ 求出第一段的弧长 $s = 15.76\text{m}$

还有6.29米的锚链拖地



锚链被拉起15.76m，拖地6.29m重量不需要浮标
 改变锚链的长度后重新计算，得到新的锚链长度，
 重复这个过程，使两次计算锚链长度的误差很小。

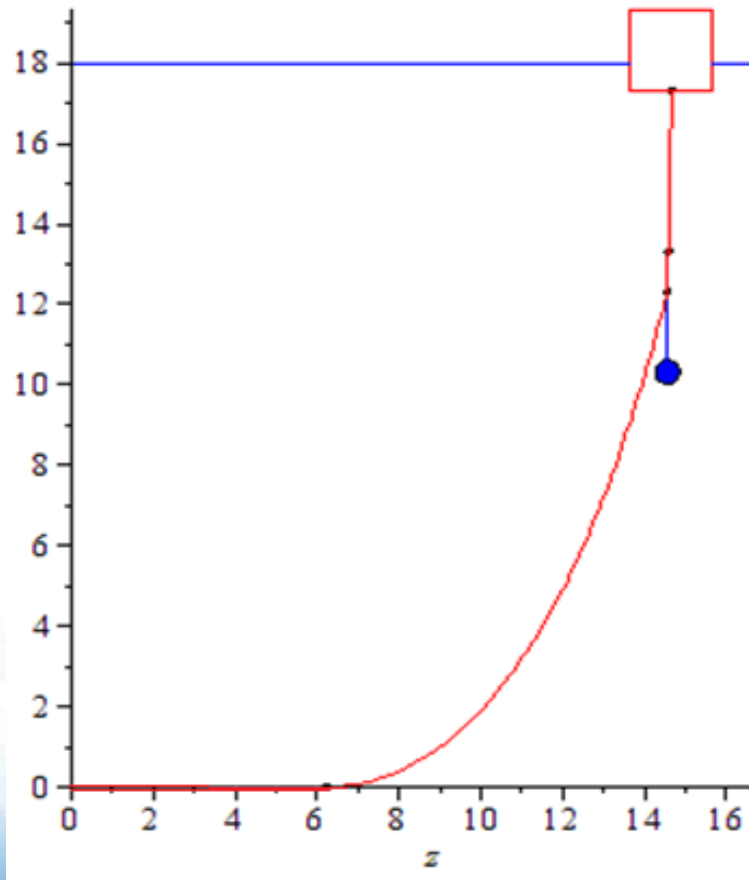
最后结果：锚链被拉起15.80m，拖地6.25m，
 浮标吃水深度：0.68m，游动区域半径14.66，
 钢桶、管倾角：1.188, 1.184, 1.175, 1.166, 1.158
 三段悬链线的方程如下

$$y = y_1(x) = 3.98(\cosh(0.25x) - 1), \quad 0 \leq x < 8.30,$$

$$y = y_2(x) = 0.88 \cosh(1.14x - 4.92) - 29.02, \quad 8.30 \leq x < 8.33,$$

$$y = y_3(x) = 2.78 \cosh(0.36x + 1.58) - 120.95, \quad 8.33 \leq x < 8.41.$$

系泊系统示意图（画图时横坐标分别加了6.25m）



临界风速：22.05m锚链恰好全部被拉起，在锚点与海床相切

思路：利用前面计算时三段悬链线的方程，对不同的风速进行计算

计算步骤：从12m/s开始逐渐增加风速，对确定的风速，计算浮标的吃水深度，

$$H_w = \frac{1000 \times 9.8 + L_0 w_0 + w + w_1 + 4w_2}{3200.13 \times 9.8}, \quad \text{风力大小 } F = 0.625 S v^2, \quad \text{悬链线参数 } a_1 = \frac{F}{w_0},$$

$$a_2 = \frac{F}{w_1}, \quad a_3 = \frac{F}{w_2}, \quad \theta_1 = \arctan\left(\frac{W_{m_0 m}}{F}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{W_{m_0 m m_1}}{F}\right), \quad \text{从第一段悬链线长度}$$

$$s_1(x) = a_1 \sinh\left(\frac{x}{a_1}\right) = L_0 \text{ 求解 } x_0, \quad \text{计算 } y_1^0 = a_1 \left(\cosh\left(\frac{x_0}{a_1}\right) - 1 \right), \quad \text{由第二、三段悬链线}$$

的长度确定它们末点的横坐标，得到第三段悬链线末端的纵坐标，令其等于浮标吃水后下端的纵坐标。循环计算后的结果是：临界风速为 $v_0 = 22.27 \text{ m/s}$

$v = 24\text{m/s}$ 超过临界风速，22.05m锚链全部被拉起，在锚点与海床夹角为 θ_0

浮标的吃水深度与 θ_0 有关：组件的重量与锚链拉力的竖直分量

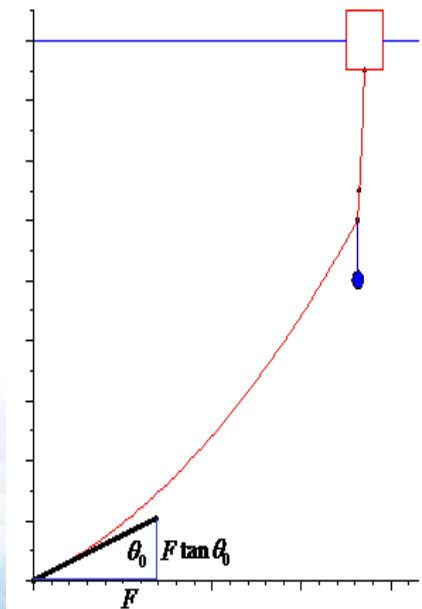
吃水深度：
$$H_w = \frac{1000 \times 9.8 + L_0 w_0 + w + w_1 + 4w_2 + 0.625 \times 2(2 - H_w) \times v^2 \times \tan \theta_0}{3200.13 \times 9.8}$$

参数：
$$a_1 = \frac{F}{w_0}, \quad a_2 = \frac{F}{w_1}, \quad a_3 = \frac{F}{w_2}, \quad \theta_1 = \arctan\left(\frac{W_{m_0 m}}{F}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{W_{m_0 m m_1}}{F}\right),$$

方程：
$$y = y_1(x) = a_1 \left(\cosh\left(\frac{x}{a_1} + \ln\left(\frac{1 + \sin \theta_0}{\cos \theta_0}\right)\right) - \frac{1}{\cos \theta_0} \right), \quad a_1 = \frac{F}{w_0},$$

$$y = y_2(x) = a_2 \cosh\left(\frac{x - x_0}{a_2} + \ln\left(\frac{1 + \sin \theta_1}{\cos \theta_1}\right)\right) + y_1^0 - \frac{a_2}{\cos \theta_1}, \quad a_2 = \frac{F}{w_1},$$

$$y = y_3(x) = a_3 \cosh\left(\frac{x - x_1}{a_3} + \ln\left(\frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2}\right)\right) + y_2^1 - \frac{a_3}{\cos \theta_2}, \quad a_3 = \frac{F}{w_2}.$$



计算思路：锚链的夹角 θ_0 由小到大循环计算
对给定的 θ_0 ，计算过程与风速 12m/s 的相同
 $v = 24\text{m/s}$ 的计算结果如下

浮标的吃水深度： $H_w = 0.70\text{m}$ ，游动半径： $R = 17.78\text{m}$

锚链与海床的夹角： $\theta_0 = 4.48^\circ$ ，钢桶的倾度： $\beta_0 = 4.57^\circ$

钢管的夹角： $\beta_0 = 4.45^\circ$ ， $\beta_0 = 4.33^\circ$ ， $\beta_0 = 4.21^\circ$ ， $\beta_0 = 4.09^\circ$

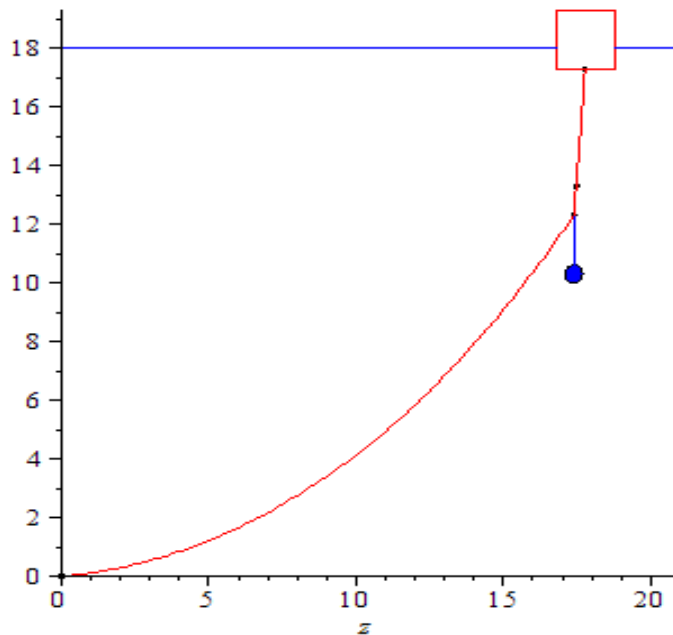
三段悬链线的方程分别为：

$$y = 15.74(\cosh(0.064x + 0.078) - 1), 0 \leq x < 17.39,$$

$$y = 3.47 \cosh(0.288x - 1.796) - 30.80, 17.39 \leq x < 17.47,$$

$$y = 11.02 \cosh(0.091x + 1.647) - 126.59, 17.47 \leq x < 17.78.$$

系泊系统示意图见右



思路：用风速24m/s 的相同的模型和计算方法，先给出风速36m/s、重物球质量1200kg时的计算结果，说明是否需要增加重物球的质量。

$v = 36\text{m/s}$ 的计算两个主要的结果：

锚链与海床的夹角： $\theta_0 = 20.89^\circ$ ，钢桶的倾度： $\beta_0 = 9.45^\circ$ ，

这两个指标都不满足要求，需要减小到 16° 和 5° 之内。

途径：增加重物球的重量

计算步骤:

从1200kg开始逐渐增加重物球的重量，对给定的质量 m ，确定锚链的夹角 θ_0 的大小，使得第三段悬链线末端的纵坐标与浮标吃水后下端的纵坐标相等。

计算结果：重物球质量 $m=2221.21\text{kg}$

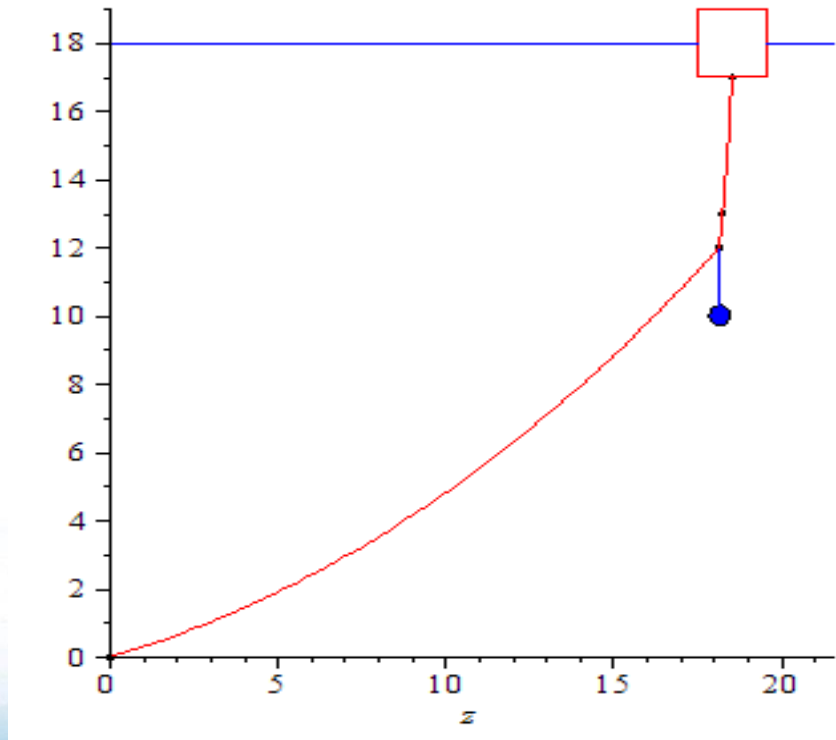
浮标： $H_w=0.70\text{m}$ ，半径： $R=17.78\text{m}$

锚链与海床的夹角： $\theta_0=4.48^\circ$ ，

钢桶： $\beta_0=4.57^\circ$ ，钢管： $\beta_0=4.45^\circ$ ，

$\beta_0=4.33^\circ$ ， $\beta_0=4.21^\circ$ ， $\beta_0=4.09^\circ$

系泊系统示意图见右



4. 问题3的模型与求解

考虑水流力时，需要计算各个组件上的水流力大小。

当水流速度为 1.5m/s 时，5种型号锚链每米的水流力 $u_1=19.23, u_2=28.45, u_3=38.01, u_4=47.48, u_5=57.01$ (N/m)，钢桶和钢管上的水流力： $h_1=253.45, h_2=42.08$ (N/m)，水流对沉入水中每米浮标的水流力 $h_0=1683$ (N/m)。

注意：这些都是在水流方向与这些组件垂直时单位长度所受的力。

重物球的质量为 m 时，其半径为 $\left(\frac{3 \times m}{4 \times 7800 \times \pi}\right)^{1/3}$ ，

海水的作用力大小为： $374 \times \pi \times \left(\frac{3 \times m}{4 \times 7800 \times \pi}\right)^{2/3} \times v^2$ (N)

需要考虑水流力时，记 T 和 θ 为 $P(x, y)$ 点的力和夹角，则悬链线的方程为

$$\frac{dT}{ds} = -f \cos \theta \sin \theta + \rho \sin \theta, T(0) = H,$$

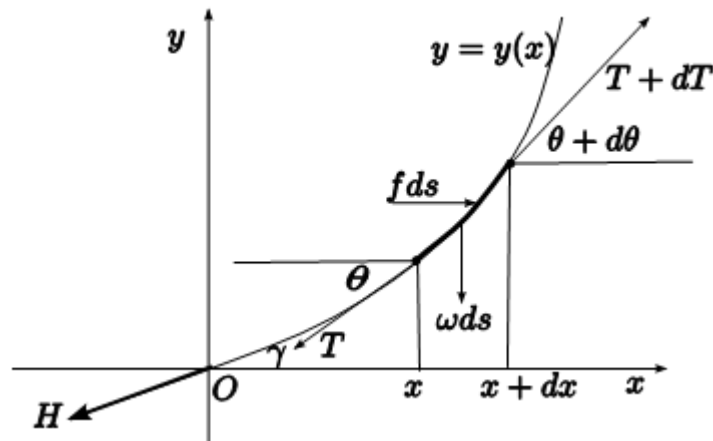
$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{f \sin^2 \theta + \rho \cos \theta}{T}, \quad \theta(0) = \gamma.$$

注意，这里的自变量是悬链线的弧长 s ，

x 和 y 与 s 的关系为 $\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \frac{dy}{ds} = \sin \theta$,

这个方程无法求出解析解，可以利用计算机进行数值求解，得到许多个弧长 s 所对应的 T, θ, x, y ，得到悬链线的形状。

如利用Euler折线法求解的公式如下



$$T_{k+1} = T_k + (-f \cos \theta_k \sin \theta_k + \rho \sin \theta_k) \Delta s_k, T_0 = H,$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{f \sin^2 \theta_k + \rho \cos \theta_k}{T_k} \Delta s_k, \quad \theta_0 = \gamma,$$

$$x_{k+1} = x_k + \cos \theta_k \Delta s_k, \quad x_0 = 0,$$

$$y_{k+1} = y_k + \sin \theta_k \Delta s_k, \quad y_0 = 0.$$

试算求解的主要步骤

- 给定重物球的质量、锚链长度、锚链在锚点的夹角；
- 计算浮标吃水深度、锚点的水平力和竖直力的大小、；
- 数值求解锚链对应的第一段悬链线；
- 计算钢桶的夹角，数值求解钢桶所对应的第二段悬链线；
- 计算最下钢管的夹角，数值求解钢管所对应的第三段悬链线；
- 调节弧长，令第三段悬链线的末端与浮标下端高度相等，
- 比较不同情况确定出锚链型号、长度、重物球的质量。

锚点水平力=锚链、重物球、钢桶、钢管、浮标上的水平力之和；

锚点竖直力=锚点水平力乘以夹角的正切值；

决定浮标吃水深度=锚点竖直力+ 锚链、重物球、钢桶、钢管、浮标的重力；

锚链上的水流力=上端点的纵坐标乘以单位锚链所受的水流力；

迭代确定力的大小和浮标的吃水深度：

- 对水平力和竖直力进行初始估计，计算出浮标的吃水深度；
- 浮标上的风力和水流力，钢管、钢桶、锚链上的水流力，得到水平力；
- 乘正切得到竖直力，加上原来浮标所承受的力，重新计算其吃水深度；
- 修改水平力、竖直力、吃水深度，迭代计算到需要的精度。

- 钢桶对应悬链线下端的夹角可以通过受力分析得到：
- 水平力等于浮标上的风力和水流力加上4节钢管和钢桶上的水流力；
- 竖直力等于锚链和小球在海水中的重量加上锚点的竖直力；
- 竖直力和水平力的比值就是夹角的正切，由此确定角度大小。
- 钢管对应悬链线下端的夹角也是通过受力分析得到：
- 水平力等于浮标上的风力和水流力加上4节钢管上的水流力；
- 竖直力等于锚链、重物球、钢桶在海水中的重量加上锚点的竖直力；
- 竖直力和水平力的比值就是夹角的正切，由此确定角度大小。

- 重物球的质量主要影响钢桶的倾斜角度；
- 锚链的长度主要影响锚链在锚点与海床的夹角；
- 在浮标吃水深度大致相同时，V型锚链可减小游动区域；

选用V型锚链

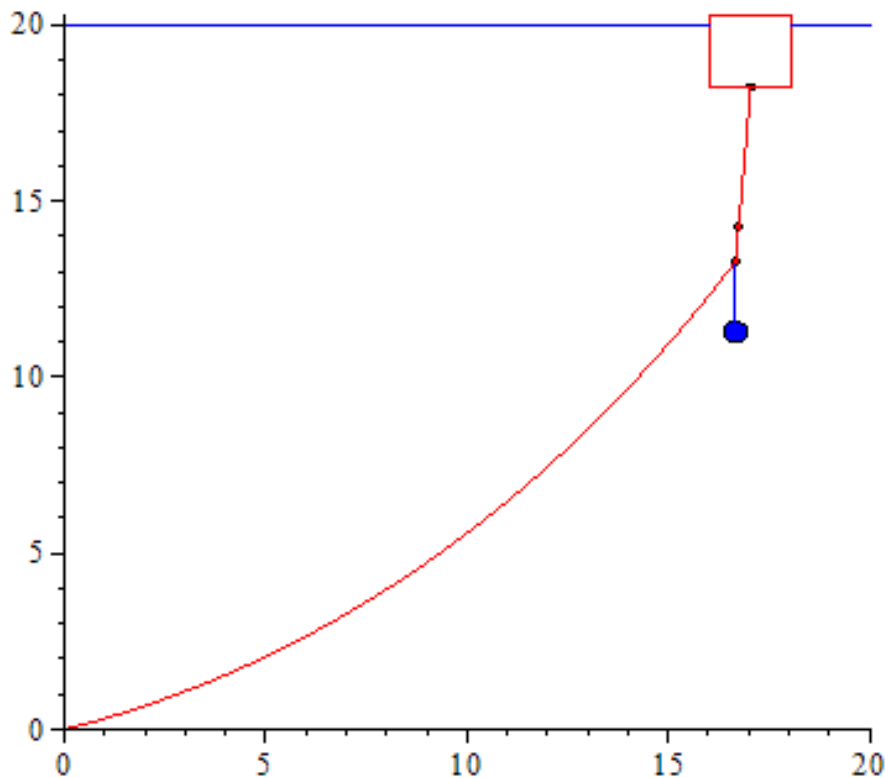
- 极端情况1：风速:36m/s、 水速1.5m/s、 水深20m，
需要锚链21.82m，重物球的质量为4270kg；
锚链夹角为16度，钢桶的倾斜角度为5度；
浮标吃水深度1.69m，游动半径17.07m。

- 极端情况2：风力36m/s、水1.5m/s、水深16m；
需要锚链21.44m，重物球的质量4460kg；
锚链夹角为0度，钢桶的倾斜角度为5度；
浮标的吃水深度1.70m，浮标半径18.94m。

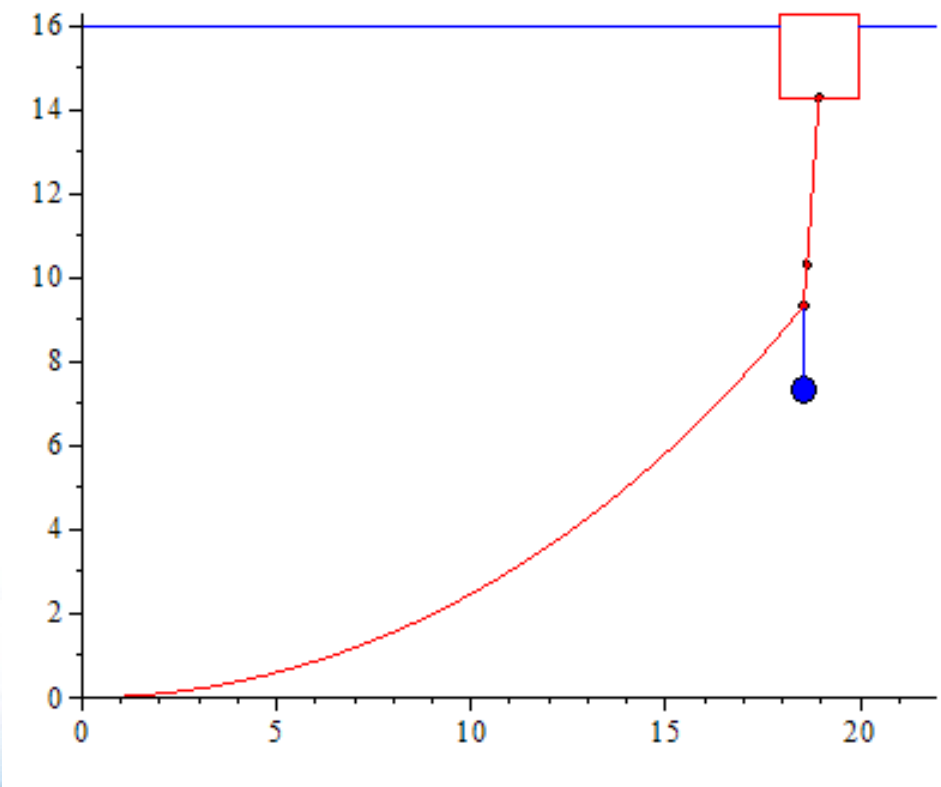
当重物球的质量为4460kg时，对风力36m/s、水速1.5m/s、水深20m的情况，用锚链21.78m锚链，就可以使得锚链与海床的夹角为16度。

系统设计：V型锚链21.78m，重物球质量4460kg。

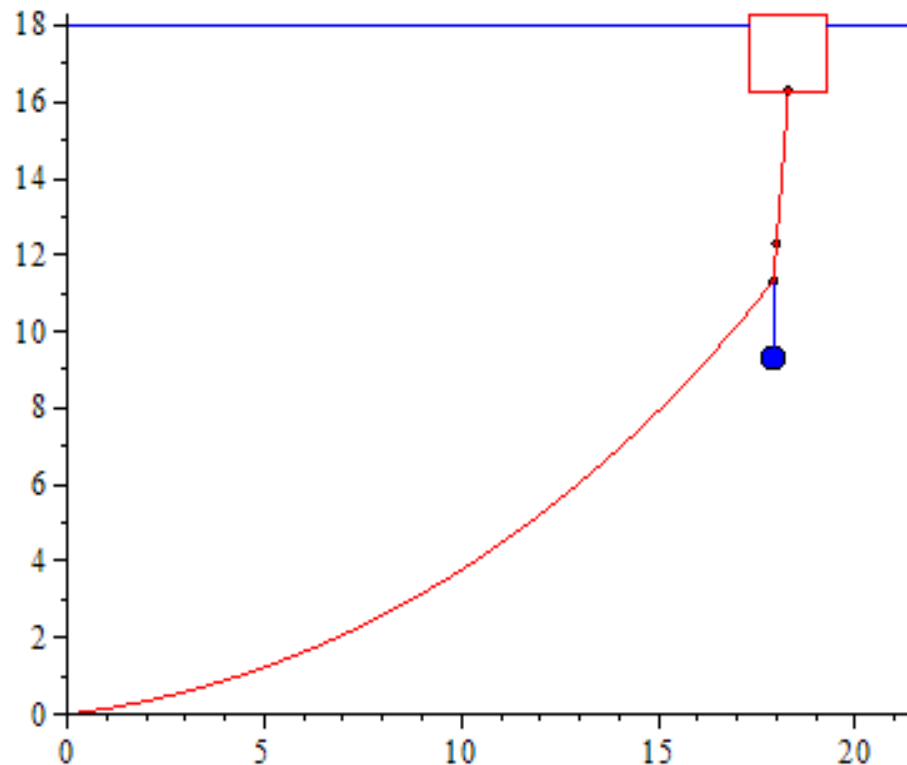
情况 (1) 海面风速 36m/s 、海水速度 1.5m/s 、水深 20m ，浮标的吃水深度为 1.75m ，游动区域半径为 17.05m ，锚链全部拉起，锚链与海床的夹角为 16° ，钢桶与海床的夹角为 4.82° 。



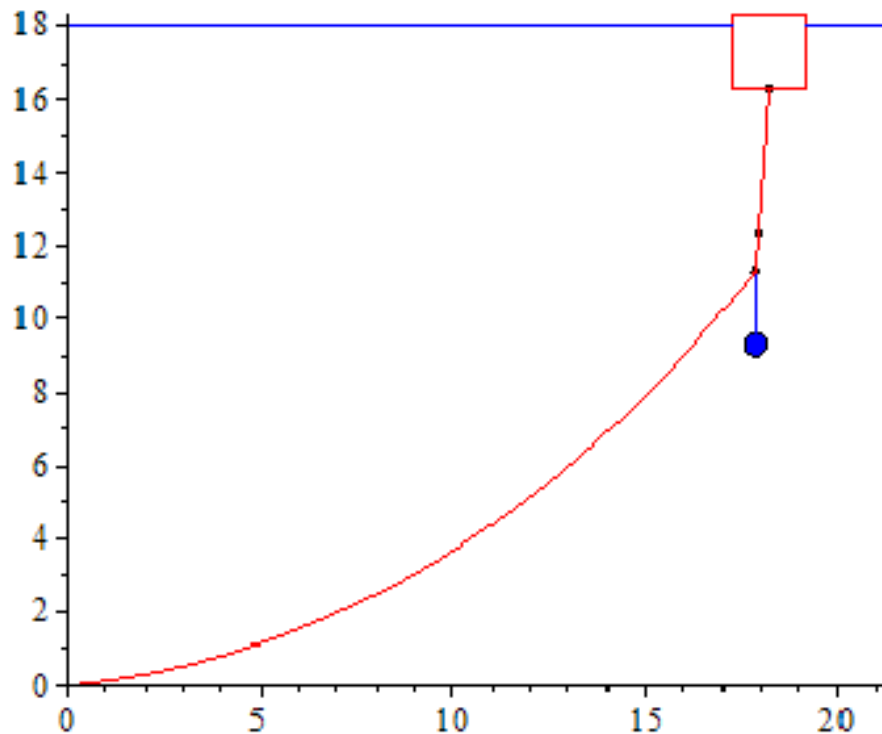
情况 (2) 海面风速36m/s、
 海水速度1.5m/s、水深16m，
 浮标的吃水深度为1.70m，
 游动区域的半径为19.28m，
 锚链有0.34m拖地，
 锚链与海床夹角为0度，
 钢桶与海床的夹角为5度



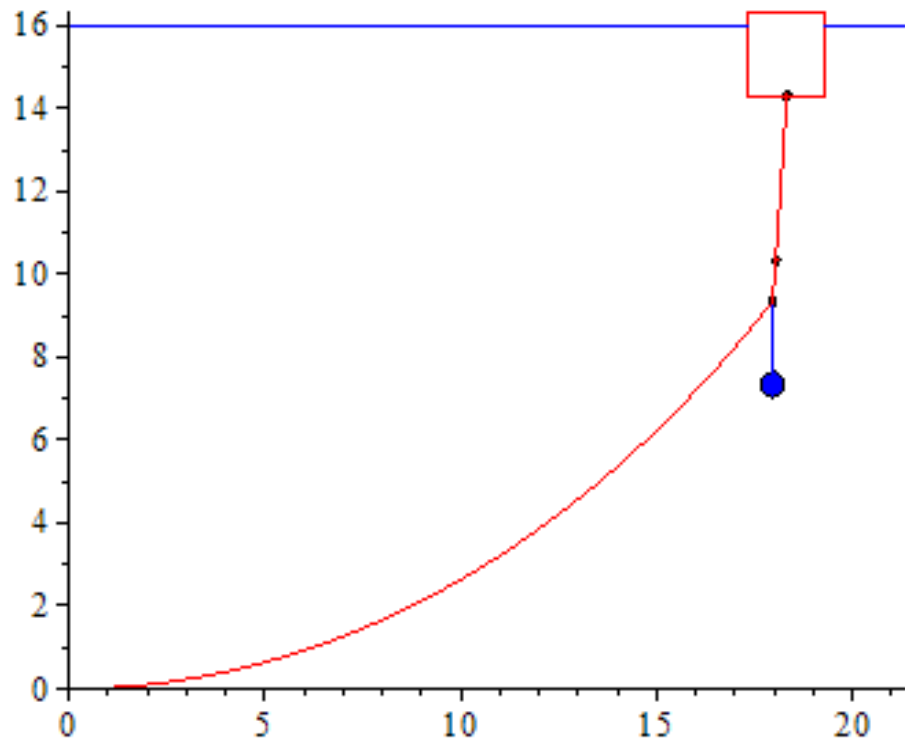
情况 (3) 海面风速 36m/s 、
海水速度 1.5m/s 、水深 18m ，
浮标的吃水深度 1.72m ，
浮标的游动半径为 18.30m ，
锚链被全部拉起，锚链与
海床的夹角为 7.08° ，
钢桶的倾角为 4.91° 。



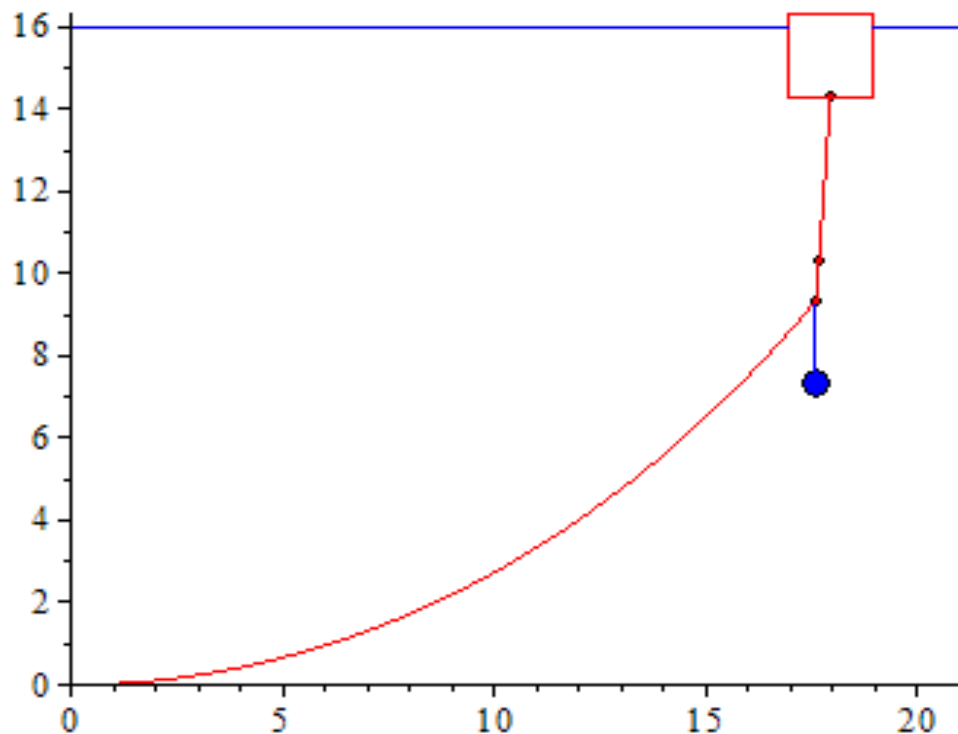
情况 (4) 海面风速 24m/s 、海水速度 1.5m/s 、水深 18m ，浮标的吃水深度为 1.71m ，游动区域半径为 18.20m ，锚链全部拉起，锚链与海床的夹角为 5.83° ，钢桶的倾斜角度为 4.59° 。



情况 (5) 海面风速 24m/s 、海水速度 1.5m/s 、水深 16m ，浮标的吃水深度为 1.69m ，浮标的游动半径为 19.17m ，锚链有 0.84m 拖地，锚链与海床的夹角为 0 度，钢桶倾斜角度为 4.64 度。



情况 (6) 海面风速 12m/s 、
海水速度 1.5m/s 、水深 16m ，
浮标的吃水深度为 1.69m ，
浮标的游动半径为 19.10m ，
锚链有 1.14m 拖地，锚链
与海床的夹角为 0° ，钢桶
的倾斜角度为 4.42°



5. 离散化的递推模型

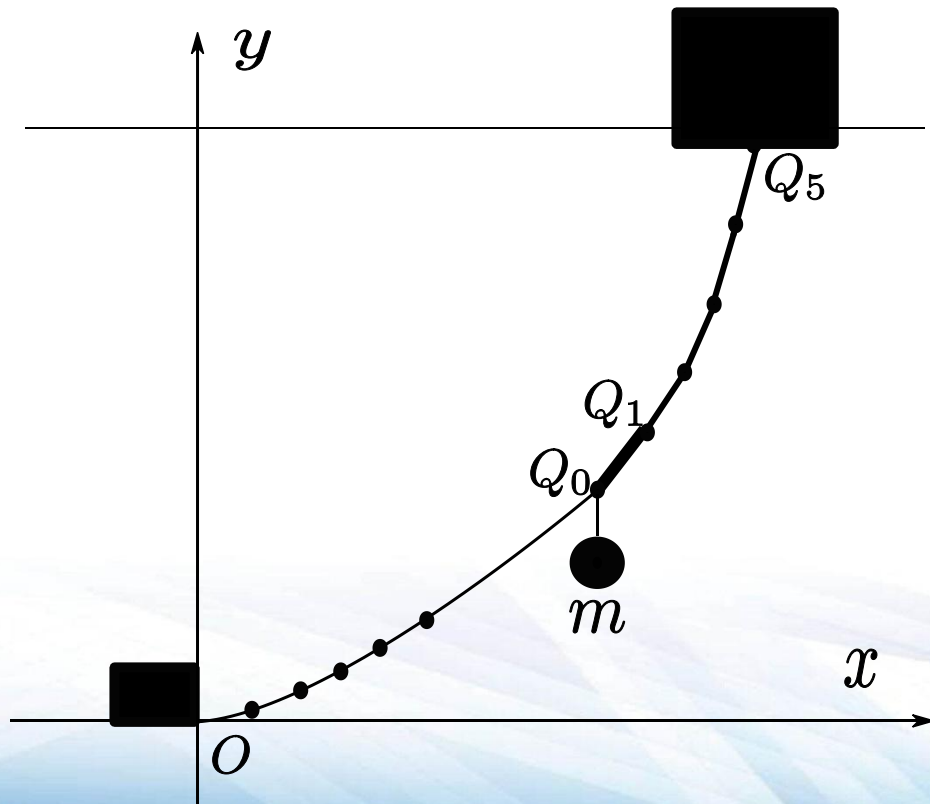
锚链、钢桶、钢管均为刚体，共215个组件，通过力平衡、力矩平衡建模，计算出结果。

编号规则

1-210 对应一节锚链

211对应 钢桶

212-215对应一节钢管



对第 j 个组件，两个坐标轴方向上力的平衡方程

$$U_j \cos \beta_j = D_j \cos \alpha_j$$

$$U_j \sin \beta_j + B_j = D_j \cos \alpha_j + W_j$$

以组件下端点为中心的力矩平衡方程

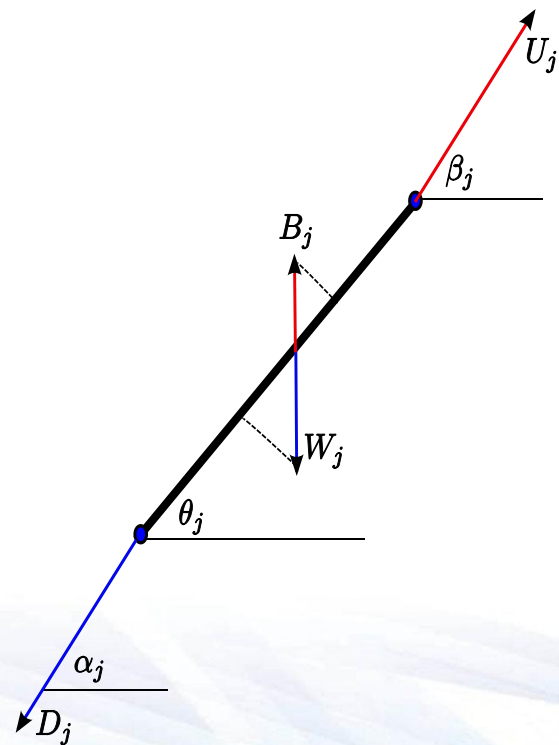
$$U_j \cos \beta_j \cdot l_j \sin \theta_j + W_j \cdot \frac{l_j}{2} \cos \theta_j = U_j \sin \beta_j \cdot l_j \cos \theta_j + \frac{l_j}{2} B_j \cos \theta_j$$

对第 j 个组件的夹角：
$$\tan \theta_j = \frac{2U_j \sin \beta_j + B_j - W_j}{2U_j \cos \beta_j}$$

递推关系为：
$$U_j \cos \beta_j = D_j \cos \alpha_j = F$$

$$U_{j+1} \sin \beta_{j+1} = D_j \sin \alpha_j + W_j - B_j$$

在钢桶对应的组件中要考虑重物球的重量



根据问题的实际背景，有下面的关系

水平力： $U_j \cos \beta_j =$ 浮标所受的风力= $F(= 236.32\text{N}$ ，210节锚链全部拉起时)

竖直力： $U_j \sin \beta_j$ 该点之下所有组件在海水中的重量。

锚链部分， $W_j - B_j = w_0 = 59.59\text{N}$ ， $\tan \theta_j = \frac{(2j-1)w_0}{2F}$ ， $\theta_j = \arctan \frac{(2j-1)w_0}{2F}$

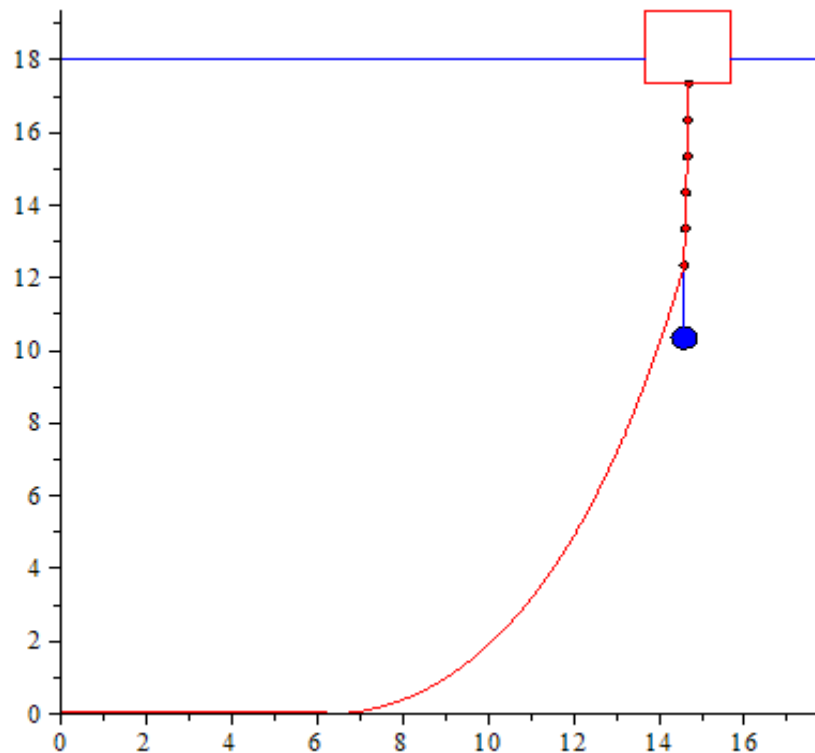
$x_0 = 0$ ， $y_0 = 0$ ， $x_{j+1} = x_j + l_j \cos \theta_j$ ， $y_{j+1} = y_j + l_j \sin \theta_j$ ，

钢桶： $\theta_{211} = \arctan \frac{420w_0 + 2w - w_1}{2F}$ ， $x_{211} = x_{210} + \cos \theta_{211}$ ， $y_{211} = y_{210} + \sin \theta_{211}$ ，

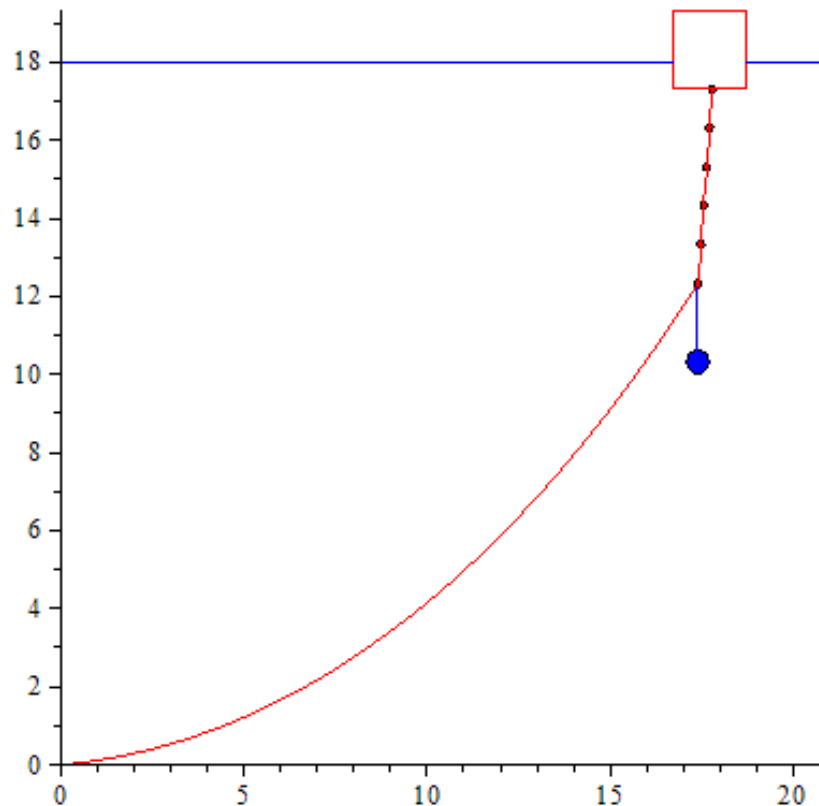
钢管： $\theta_{212} = \arctan \frac{420w_0 + 2w + 2w_1 - w_2}{2F}$ ， $x_{212} = x_{211} + \cos \theta_{212}$ ， $y_{212} = y_{211} + \sin \theta_{212}$

其余三节钢管的计算过程类似

210节环链全用时，得到末端的坐标
高于浮标下端的坐标，调整计算后得：
拉起的锚链151节，长度15.855m，
拖地锚链59节，拖地长度6.195m，
浮标吃水深度0.684m，
浮标游动半径14.61m，
钢桶倾斜角度 1.23° ，
钢管倾斜角度： $1.19^\circ, 1.16^\circ, 1.14^\circ, 1.11^\circ$
系泊系统示意图见右

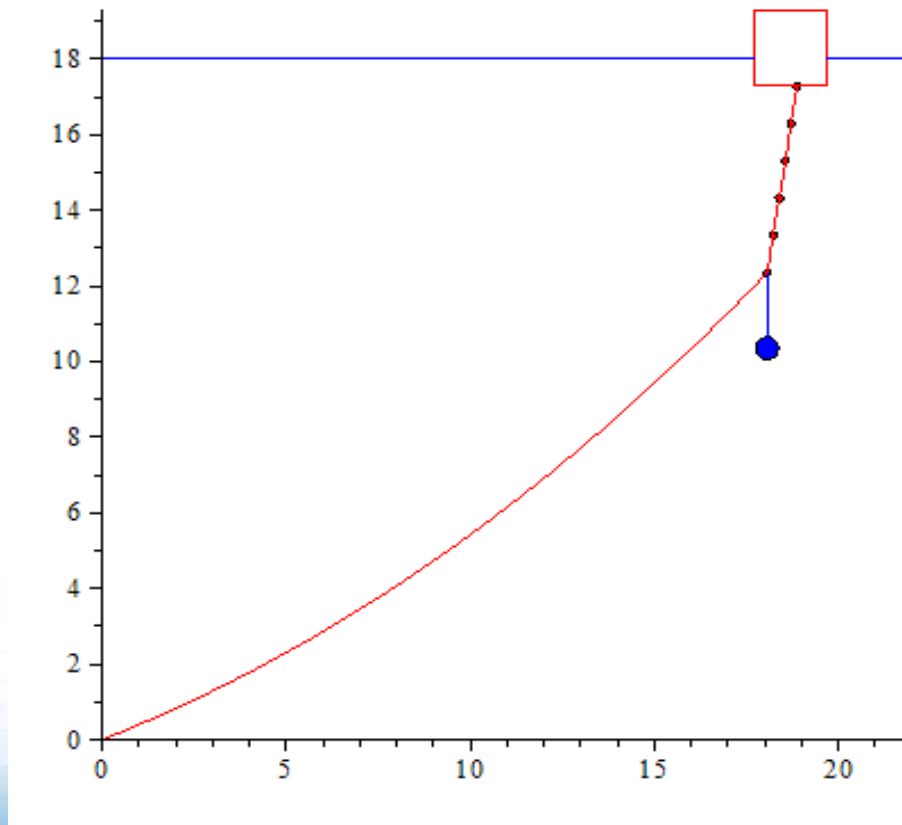


210节环链全用，锚链与海床夹角 θ_0 ，
浮标承载力要增加锚点竖直力 $\tan\theta_0$ ，
调节 θ_0 的大小，计算后得到结果如下：
锚链全部拉起，210节，长度22.05m，
锚链在锚点与海床的夹角为 4.49° ，
浮标吃水深度0.698m，
浮标游动半径17.78m，
钢桶倾斜角度 4.7° ，
钢管倾斜角度： $4.6^\circ, 4.5^\circ, 4.3^\circ, 4.2^\circ$
系泊系统示意图见右



重物球质量1200kg (调节前的情况);
 210节环链全用, 且在锚点有夹角
 锚链全部拉起, 210节, 长度22.05m,
 锚链在锚点与海床的夹角为 20.9° ,
 浮标吃水深度0.72m,
 浮标游动半径18.87m,
 钢桶倾斜角度 9.7° ,
 钢管倾斜角度: $9.4^\circ, 9.2^\circ, 9.0^\circ, 8.8^\circ$
 系泊系统示意图见右

锚链和钢桶的夹角都不满足要求,
 需要通过增加重物球的重量来调整



重物球质量2221.5kg(调节后的情况);

210节环链全用, 且在锚点有夹角

锚链全部拉起, 210节, 长度22.05m,

锚链在锚点与海床的夹角为 16° ,

浮标吃水深度0.986m,

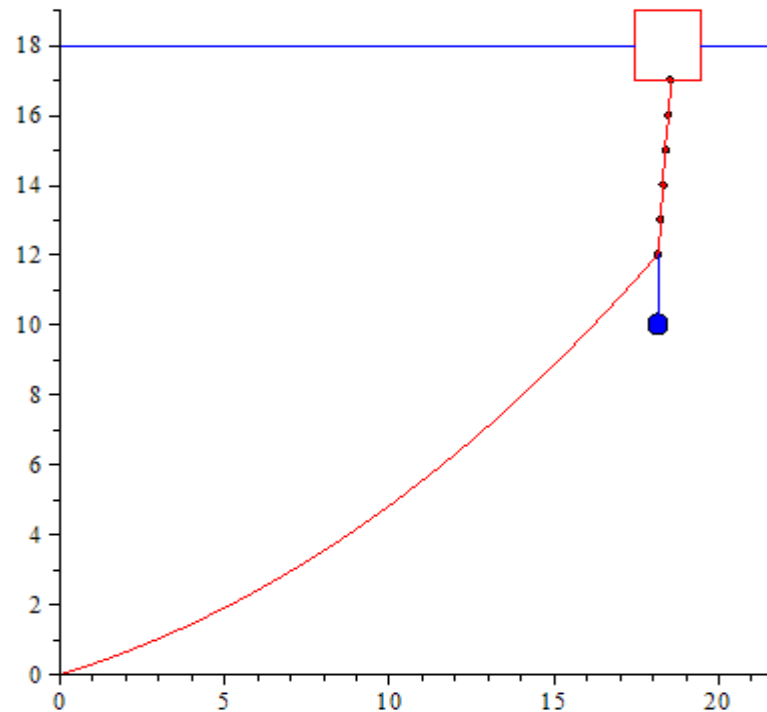
浮标游动半径18.54m,

钢桶倾斜角度 4.57° ,

钢管倾斜角度: $4.49^\circ, 4.43^\circ, 4.38^\circ, 4.32^\circ$

系泊系统示意图见右

锚链夹角恰好是16度, 钢桶的夹角小于5度。



对第 j 个组件，两个坐标轴方向上力的平衡方程

$$U_j \cos \beta_j + S_j = D_j \cos \alpha_j, U_j \sin \beta_j + B_j = D_j \cos \alpha_j + W_j$$

以组件下端点为中心的力矩平衡方程

$$U_j \cos \beta_j \cdot l_j \sin \theta_j + W_j \cdot \frac{l_j}{2} \cos \theta_j + S_j \cdot \frac{l_j}{2} \sin \theta_j$$

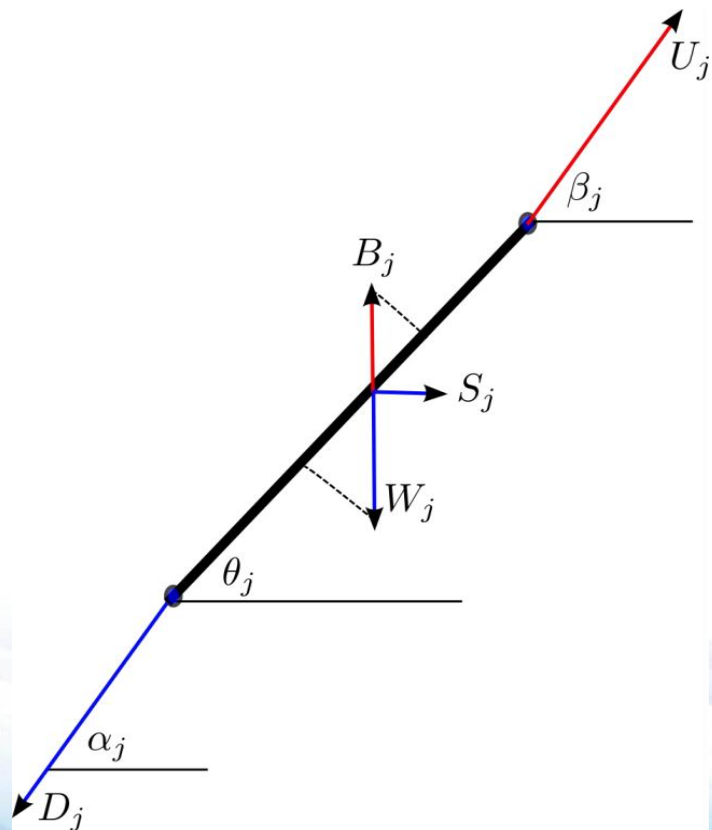
$$= U_j \sin \beta_j \cdot l_j \cos \theta_j + \frac{l_j}{2} B_j \cos \theta_j$$

对第 j 个组件的夹角：
$$\tan \theta_j = \frac{2U_j \sin \beta_j + B_j - W_j}{2U_j \cos \beta_j + S_j}$$

递推关系为：
$$U_j \cos \beta_j = D_j \cos \alpha_j - S_j$$

$$U_{j+1} \sin \beta_{j+1} = D_j \sin \alpha_j + W_j - B_j$$

还需要考虑重物球的重量和作用在其上的水流力



根据问题的实际背景，力和角度有下面的关系

水平力： $U_j \cos \beta_j =$ 浮标所受的风力和水流力+上面组件的水流力

竖直力： $U_j \sin \beta_j$ 该点之下所有组件在海水中的重量+锚点的竖直力。

分为锚链部分、钢桶、钢管三种情况计算，试算、迭代实现：

对给定的锚链长度、夹角和重物球质量，先估计一下各个部件上

的水平力和竖直力，用 $x_0 = 0, y_0 = 0, \tan \theta_j = \frac{2U_j \sin \beta_j + B_j - W_j}{2U_j \cos \beta_j + S_j}$,

$x_{j+1} = x_j + l_j \cos \theta_j, y_{j+1} = y_j + l_j \sin \theta_j$, 计算个点的坐标和角度；

将前一次计算的角度代入，计算力的大小、吃水深度等，迭代循环到一定的精度即可。

6. 竞赛答卷情况综述

系泊系统设计题目是在实际问题的基础上加工形成的，用到力平衡、力矩平衡、悬链线、递推关系等基础的物理和数学知识，适合于本科生的水平，也有一定的挑战性和发挥空间。网络上有一些讨论系泊系统的论文可以参考，但没有完全类似的结果可以直接套用，需要学生在已有知识的基础上通过受力分析建立模型和给出结果。

- 选A题的都用受力分析建立模型，计算机求解给出了结果；
- 大部分分为下部锚链和上部钢桶、钢管进行讨论，下面部分将锚链看作柔软的绳索，用悬链线方程处理，上面的部分通过钢桶、钢管的力平衡、力矩平衡给出递推关系；
- 一部分队将锚链的每一个环节看作一个刚体，与上面的钢桶和4节钢管一样，通过受力分析得到递推关系，通过计算机循环计算给出结果；
- 前一种是比较简炼，后一种是方法统一。

- 计算浮力时考虑重物球的不同材质，分别对钢铁、铅、混凝土等不同情况下的浮力进行了计算；
- 问题3中分析海面风力和海水中水流力不同方向对模型和结果的影响；
- 进行受力分析用到虚功原理等建立模型；
- 考虑了浮标受力后的倾斜情况；
- 收集到了胶州湾海域的台风、海潮等数据，应用自己的模型和方法给出了实例；
- 建立悬链线方程时利用 $s = k \tan \theta + b$ ，使建模、分析和计算简单。

许多参赛队在建模过程中没有考虑浮力的影响，这就导致了计算结果较大的误差，如问题2中考虑浮力时重物球的质量应该增加到2200kg左右，而不考虑浮力时重物球的质量只有1800kg左右。题目中给出了海水的密度，锚链、重物球、钢桶、钢管的质量，在有海水浮力的情况下需要浮标承载的重量与不考虑浮力时大不相同，尽管题目之中没有明确重物球等组件的材质，应该根据自己的理解按照钢铁或其它材质去计算浮力，完全忽略是不合适的。

在对钢桶和钢管的受力分析分析中，有不少参赛队的同学没有考虑力矩的平衡，只给出了力的平衡关系，并认为力的方向是与钢管或钢桶的方向一致。由于钢管和钢桶的夹角都不大，力的方向和钢管或钢桶的方向接近，计算结果误差不大，但有可能这个错误会在其它一些问题中导致较大的误差。

有不少队给出的算法不清楚，或者无法实现。如在建模分析过程中，有些参赛队给出了浮标吃水深度、钢桶倾斜角度、各节钢管倾斜角度、锚链与海床的夹角等多个未知元满足的方程组，这些方程组的数目较多，在论文中只写通过某一种软件求解，然后就给出计算的结果。

- (1) 网购版本 (重复率80%)
- (2) 公众微信号
- (3) 拷贝网络上的一些内容
- (4) 程序作假

网购、拷贝等的特征都很明显，不难发现；

在全国阅卷过程中发现的今年已在组委会网站上通报；

以后可能会实名通报。

学生对一些基本知识、理论、方法的理解不到位，没有通过一些应用例子将这些知识融会贯通，解决实际问题的训练不足，力和力矩的平衡、悬链线方程在这个问题的建模分析中应用不好，特别是问题3中涉及水流力时的建模和计算过程比较差。这些现象需要我们在以后的教学中重视，使得学生学过的知识能够在解决实际问题的过程中得到应用。

谢 谢！