

基于改进悬链线及多目标优化的系泊系统设计

摘要

本文运用系统分析的方法研究系泊系统，分析了系统参数（风速、水速、水深、构件的尺寸和质量）与系统状态变量（浮标吃水深度、游动区域和锚链形状、钢桶倾斜角度）的关系。通过汇交力系的平衡方程分析了构件之间的作用力、构件和系统外部的作用力，再通过力矩平衡方程分析了构件的倾斜角度。

问题一是求解问题，在给定水深、风速和链长、球重等系统参数的条件下，求系统的平衡状态。本文运用了系统整体分析和自底向上的局部隔离法分析。首先，假设吃水深度为 h ，得到浮标浮力，对由锚链、钢桶、钢管和浮标组成的系统进行整体分析，根据总重力、总浮力、风对浮标的推力和锚对锚链下端的拉力这四种外力的均衡，得到锚对第一节链环的拉力；再将链环作为研究对象，根据改进的悬链线方程得到所有链环的拉力和倾斜角；接着，根据最后一节链环对钢桶的拉力，利用力平衡方程分析得到钢桶的拉力和倾斜角；然后，类似地依次向上计算 4 节钢管的拉力和倾斜角；最后，计算所有构件的竖直投影高度，加上浮标吃水深度，即为水深。通过逐步求精找到满足水深条件的吃水深度，从而确定所有链环、钢桶、钢管的倾斜角度，计算构件水平投影长度，得到浮标游动半径，并利用线段模拟得到锚链的形状。为了验证模型的误差大小，根据最上一节钢管的拉力分析浮标的受力情况，由浮标浮力得到浮标吃水深度，将其与前面所求吃水深度对比。具体结果如下：

风速 (m/s)	锚链与 海床夹 角	未拉起 锚链长 度(m)	钢桶倾 斜角度	浮标游 动半径 (m)	浮标吃 水深度 (m)	校验吃 水深度 (m)	误差率
12	0°	6.72	0.5272°	14.25988	0.73688	0.73095	0.8%
24	0°	0.21	2.0475°	17.26319	0.75103	0.74528	0.7%

问题二是问题一的反问题，给定系统平衡状态满足的两个条件（钢桶倾斜角不超过 5°，锚链与海床夹角不超过 16°）求系统的参数——重物球的质量。首先计算海面风速为 36m/s 时锚链与海床夹角为 17.83892°、钢桶的倾斜角度为 4.40762°、浮标的最大游动半径为 18.42819m。然后推导了重力球质量与上述两个角度的关系，求得锚链与海床夹角不超过 16° 时重力球质量至少为 1630.8851kg。

问题三，当风荷载与水流力方向一致时，合力最大，钢桶的倾斜角度最大，浮标游动半径最大。因此只考虑方向一致的情况，将三维空间问题转化为二维平面问题。首先，建立考虑水流作用的模型，并通过理论推导和数值实验分析了水深、重物球质量、锚链长度、型号等参数对浮标吃水深度、浮标游动区域半径和钢桶倾斜角度等状态的影响。然后，将系泊系统设计看作多目标的系统优化问题，即确定锚链的型号、长度和重物球质量这三个系统参数，使得浮标的吃水深度和游动区域半径及钢桶的倾斜角度这三个系统状态量尽量小。由于水深 16m~20m 之间，系泊系统的三个状态量不固定，经分析，水越深，浮标吃水深度越大，浮标游动区域半径和钢桶倾斜角度越小，因此用最小水深时的浮标游动半径和钢桶倾斜角度、最大水深时的浮标吃水深度作为优化目标。最后，转化为双目标优化模型，求得帕累托最优边界。

关键词：改进悬链线方程；多目标优化设计；平面任意力系平衡；整体分析；误差分析

§1 问题的提出

1.1 背景知识

随着世界科技与经济的快速发展,人类对海洋领域的开发探索也进入了发展新阶段。众所周知,开发利用任何形式的能源都离不开工程结构设备,如船舶、水下探测器、近浅海观测网等,然而无一例外在这些工程结构设备中,系泊系统是设备的重要组成部分,在维护设备持续稳定工作中有着至关重要的作用。系泊系统不仅是收集海洋环境资源的数据资料辅助工具,还是海洋工程、海洋平台、海洋养殖最常用的定位方式之一。伴随着近海工程从近海领域逐步向深远海领域发展,系泊系统的应用亦越来越广泛,推动了海洋科技的发展。

1.2 相关的数据

附表 锚链型号和参数表

型号	长度(mm)	单位长度的质量(kg/m)
I	78	3.2
II	105	7
III	120	12.5
IV	150	19.5
V	180	28.12

1.3 要解决的问题

设计系泊系统,确定锚链的型号、长度和重物球的质量,使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。

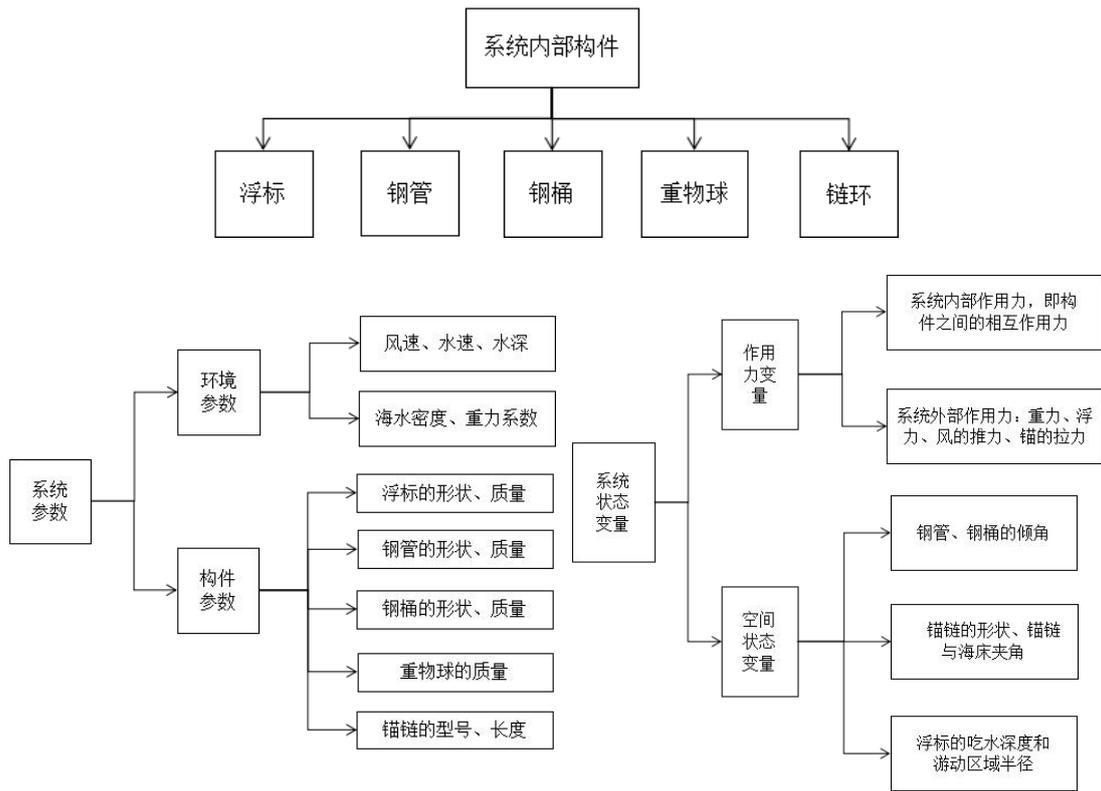
1、某型传输节点选用 II 型电焊锚链 22.05m,选用的重物球的质量为 1200kg。现将该型传输节点布放在水深 18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 的海域。若海水静止,分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

2、在问题 1 的假设下,计算海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。请调节重物球的质量,使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度,锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。

3、由于潮汐等因素的影响,布放海域的实测水深介于 16m~20m 之间。布放点的海水速度最大可达到 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。请给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计,分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

§2 问题的分析

从系统分析的角度,系泊系统包含多个组件及参数、变量,归纳如下。



1、问题一是**求解问题**，在给定水深、风速和链长、球重等系统参数的条件下，确定系统平衡状态时各构件的状态变量，包括钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。显然，本题给定的系统参数可以唯一确定系统平衡状态变量。

因为系统参数可以唯一确定系统状态变量，那么，吃水深度是系统参数的函数，在给定其余参数值时，吃水深度可由水深唯一确定，因此，水深可以表示为吃水深度的函数。我们假设吃水深度为 h ，即可得到浮标浮力，根据系统整体处于重力、浮力、风的推力、锚的拉力这四种系统外力的平衡状态，可得锚对第一节链环的拉力；再根据改进的悬链线方程计算得到最上一节链环的受力情况；进而依次向上分析得到钢桶、钢管的受力情况，再根据力矩平衡得到所有链环、钢桶、钢管的倾斜角，从而得到锚链、钢桶、钢管的竖直投影高度，加上吃水深度，即为水深。因此，根据吃水深度 h 可以得到水深 H_0 ，求解方程即可计算出吃水深度 h 。在确定了吃水深度 h 的值后，即可确定所有构件的倾斜角度，从而得到所有构件的水平投影长度，即得浮标的游动半径。

2、问题二是问题一的**反问题**，给定系统平衡状态满足的两个条件，即钢桶倾斜角不超过 5 度，锚链与海床夹角不超过 16 度，求系统的参数——重物球的质量。

3、问题三的系统设计可以看作多目标的**系统优化设计问题**，即确定锚链的型号、长度和重物球质量这三个系统参数，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度这三个系统状态量达到最优（即尽量小）。

§3 模型的假设

- 假设浮标水平；
- 不考虑海浪的影响；
- 忽略锚链和重物球的浮力；
- 不考虑链环连接处重叠部分对链环节数的影响；

- 海水各层次的水流速度相等；
- 风荷载和水流力方向平行于海平面。

§4 名词解释与符号说明

4.1 名词解释

- **悬链线方程^[1]**：悬链线是一种曲线，因其与两端固定的绳子在均匀引力作用下下垂相似而得名；
- **力矩**：在物理学中是指作用力使物体绕着转动轴或支点转动的趋向。

4.2 符号说明

符号	说明
H_0	海域的水深
$h_{\text{标}}$	浮标的高度
h	浮标的吃水深度
$H_{\text{链}}$	锚链在 z 轴方向的投影高度
$H_{\text{桶}}$	钢桶在 z 轴方向的投影高度
$H_{\text{管}}$	钢管在 z 轴方向的投影高度
$l_{\text{链}}$	锚链的长度
$l_{\text{环}}$	每节链环的长度
$l_{\text{桶}}$	钢桶的长度
$l_{\text{管}}$	每节钢管的长度
$m_{\text{链}}$	锚链的质量
$m_{\text{桶}}$	钢桶的质量
$m_{\text{球}}$	重物球的质量
$m_{\text{管}}$	钢管的质量
$m_{\text{标}}$	浮标的质量
$d_{\text{桶}}$	钢桶的直径
$d_{\text{管}}$	钢管的直径
$d_{\text{标}}$	浮标的直径
G	锚链、钢桶、重物球、钢管、浮标组成系统的重力
$F_{\text{风}}$	锚链、钢桶、重物球、钢管、浮标组成系统的风荷载
$F_{\text{浮}}$	锚链、钢桶、重物球、钢管、浮标组成系统的浮力
$F_{\text{浮桶}}$	钢桶的浮力
F_i	自下而上第 i 个构件下端的拉力大小
$V_{\text{桶}}$	钢桶的排水体积
$V_{n_{\text{管}}}$	$n_{\text{管}}$ 节钢管的排水总体积
V_4	四节钢管的排水总体积

$V_{\text{标}}$	浮标的排水体积
φ_i	自下而上第 i 个构件拉力方向与水平方向的夹角
θ_i	自下而上第 i 个构件轴向方向与水平方向的夹角
n	锚链的链环节数
$n_{\text{管}}$	钢管的节数
n_0	沉在海底链环节的节数
φ_n	钢桶下端拉力方向与水平方向的夹角
φ_{n+1}	钢桶上端拉力方向与水平方向的夹角
θ_n	钢桶轴向方向与水平方向的夹角
$\theta_{\text{桶}}$	钢桶的倾斜角度
R	浮标的极限游动半径
$F_{\text{水}1}$	浮标所受的水流力
$F_{\text{水}2}$	钢桶受到的水流力
$S_{\text{水}1}$	浮标在水流速度法平面的投影面积
$S_{\text{水}2}$	钢桶在水流速度法平面的投影面积
$v_{\text{风}}$	海风速度
$v_{\text{水}}$	水流速度
R^s	最小水深时的浮标游动区域半径 R^s
h^d	最大水深
θ_{n+1}^s	最小水深时的钢桶倾斜角度

§5 模型的建立与求解

5.1 对问题一的分析与求解

5.1.1 问题一求解思路

首先从整体出发对锚链、钢桶、重物球、钢管、浮标组成的系统进行受力分析，分别考虑所有链环**均被拉起**和**部分链环未被拉起**两种情况，分别求出锚对系统的拉力或最后一节没有被拉起来的链环对系统剩余部分的拉力（均记为 F_1 ），及拉力轴向方向倾角 φ_1 。接着从系统的局部出发自下而上分别对锚链的链环单元、钢桶、每一节钢管进行受力分析，根据平面任意力系的平衡方程，分别列出链环单元、钢桶和每一节钢管的受力平衡方程式，进而推导出链环单元轴向方向倾角 φ_i 和链环受力方向倾角 θ_i 之间的关系式以及链环单元首尾两端受力方向倾角 φ_i 和 φ_{i+1} （亦即下一节链环首段受力方向的倾角）之间的关系式，其中最后一节链环的受力需要考虑到重物球对其的拉力，同理推得钢桶和钢管单元首端轴向方向倾角和受力方向倾角、末端轴向方向倾角之间的关系式。最后利用迭代法自下而上求得各段轴向方向倾角和受力方向倾角，钢桶和各节钢管的倾斜角度即为各倾角的余角。再由各段的倾角值求得各段的函数表达式、各段在竖直方向的投影高度和在水平方向的投影长度，用分段函数表达式描述出锚链的具体形状，根据水深和吃水深度、各段在竖直方向投影高度的关系求解出浮标的吃水深度，各段在水平方向的投影长度即为浮标的极限游动半径，从而求出浮标的游动区域。求解思路图示如下。

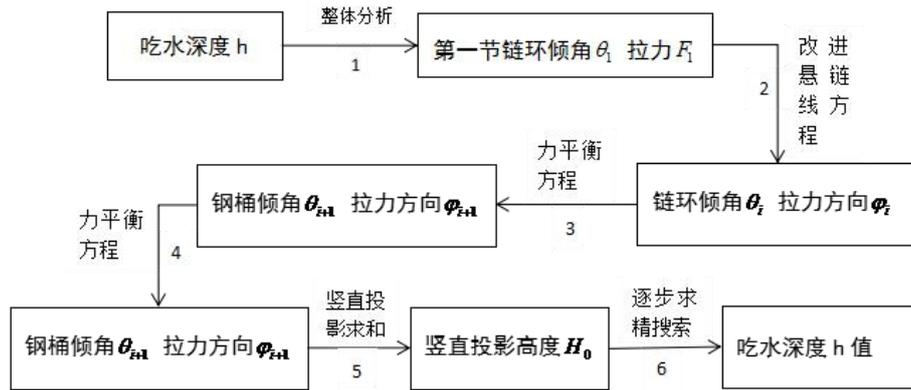


图 1 吃水深度的求解流程

5.1.2 系统整体受力分析

以锚链和锚的连接点为原点，海面风的风向为 x 轴，垂直于海床指向海平面的方向为 z 轴建立直角坐标系。

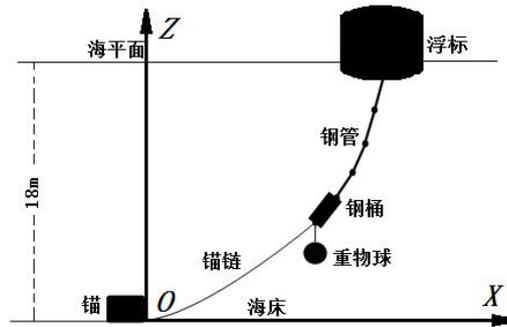


图 2 xOz 坐标系

将锚链、钢桶、重物球、钢管、浮标看作一个整体，进行受力分析，整体受力包括风荷载 $F_{\text{风}}$ 、系统重力 G 、浮力 $F_{\text{浮}}$ （为了简化计算，略去锚链和重物球所受到的浮力，仅考虑钢桶、钢管、浮标所受到的浮力）以及锚对第一节链环的拉力。

$$\text{风荷载为 } F_{\text{风}} = 0.625 S_{\text{上}} v_{\text{风}}^2 = 0.625 d_{\text{桶}}^2 v_{\text{风}}^2 (h_{\text{标}} - h)$$

$$\text{钢桶的排水体积为 } V_{\text{桶}} = \pi l_{\text{桶}} \frac{d_{\text{桶}}^2}{4}$$

$$n_{\text{管}} \text{ 节钢管的排水总体积为 } V_{n_{\text{管}}} = \pi l_{\text{管}} n_{\text{管}} \frac{d_{\text{管}}^2}{4}$$

$$\text{四节钢管的排水总体积为 } V_4 = 4 \pi l_{\text{管}} \frac{d_{\text{管}}^2}{4} = \pi l_{\text{管}} d_{\text{管}}^2$$

$$\text{浮标的排水体积为 } V_{\text{标}} = \pi h \frac{d_{\text{标}}^2}{4}$$

$$\text{整体受到的浮力为 } F_{\text{浮}} = \rho g V = \rho g (V_{\text{桶}} + V_{\text{管}} + V_{\text{标}})$$

$$\text{整体受到的重力为 } G = m_{\text{链}} g + m_{\text{球}} g + m_{\text{桶}} g + n_{\text{管}} m_{\text{管}} g + m_{\text{标}} g$$

锚对整体的拉力即锚对第一节链环的拉力 F_1 ，将拉力 F_1 分解为沿 x 轴方向的水平分力 F_x 和沿 z 轴方向的水平分力 F_z ，整体受力平衡关系式如式(1)所示。

$$\begin{cases} F_x = F_{\text{风}} \\ F_z = F_{\text{浮}} - G \end{cases} \quad (1)$$

在上式中，对系统需考虑两种情况。

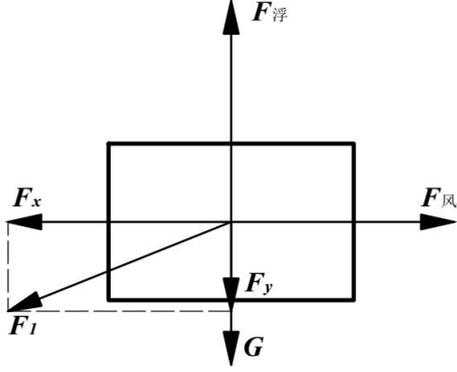


图3 第一种情况

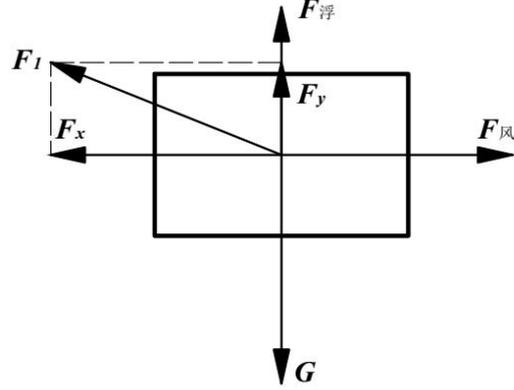


图4 第二种情况

第一种情况，总浮力大于总重力。当 $F_{\text{浮}} > G$ ，即 $F_z > 0$ 时，式(2)成立，则锚对第一节链环的拉力和链环受力方向的倾角为

$$\begin{cases} F_1 = \sqrt{F_z^2 + F_x^2} \\ \varphi_1 = \arctan \frac{F_z}{F_x} \end{cases} \quad (2)$$

第二种情况，总浮力小于等于总重力。当 $F_{\text{浮}} \leq G$ ，即 $F_z \leq 0$ 时，式(2)不成立，此时锚对系统无竖直方向拉力，忽略链环所受浮力，有部分链环水平躺在海床上，仅受海床的支持力和自身重力，则最后一节没有被拉起的链环对系统剩余部分有竖直方向的拉力，设共有 n_0 链环没有被拉起来。

其中， $n_0 = \left\lceil \frac{-F_z}{m_{\text{环}}g} \right\rceil$ （ $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整），则最后一节没有被拉起来的链环对系统剩余部分的拉力为

$$\begin{cases} F_{x_{n_0}} = F_{\text{风}} \\ F_{z_{n_0}} = n_0 m_{\text{环}}g + F_z = n_0 m_{\text{环}}g + F_{\text{浮}} - G \end{cases}$$

解得拉力、拉力方向与水平方向的夹角分别为

$$\begin{cases} F_{n_0+1} = \sqrt{F_{z_{n_0}}^2 + F_{x_{n_0}}^2} \\ \varphi_{n_0+1} = \arctan \frac{F_{z_{n_0}}}{F_{x_{n_0}}} \end{cases} \quad (3)$$

5.1.3 锚链的受力分析

悬链线方程的改进^[2]：传统的悬链线方程是在绳受力方向必沿绳切线方向的基础上推导而得，但是链环、钢桶和钢管均不是二力杆，所以需要考虑到实际情况下链环、钢桶和钢管的受力方向并不是沿着它们的轴向方向，轴向方向倾角和受力方向倾角有一定的偏差。传统的悬链线方程仅仅根据所有各力在两个任意的坐标轴上的投影的代数和分

别等于零，我们在其基础上进行改进，加入力矩平衡方程式（ $\sum M_o(F_i)=0$ ），得到改进后的悬链线方程，具体改进过程如下。

以链环、钢桶和钢管作为研究对象，根据平面任意力系的平衡方程，分别列出链环、钢桶和钢管的受力平衡方程式。

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum F_x = 0 \\ \sum M_o(F_i) = 0 \end{cases}$$

系泊系统正常工作时，锚链是悬链状态。由于锚链质量均匀，具有较好的柔韧性，因此可以将其视为悬链线问题，以单个链环为研究对象进行受力分析，如下图 所示。

设链环单元的轴向方向斜角为 θ_i ，下端的拉力方向斜角为 φ_i ，上端的拉力方向斜角为 φ_{i+1} 。

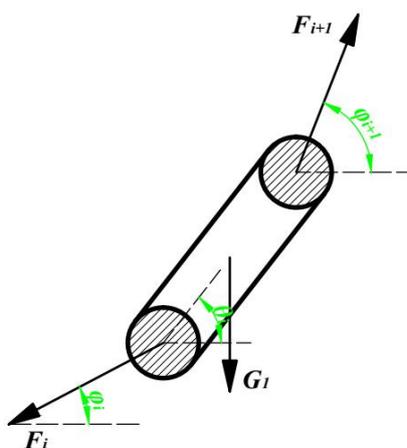


图 5 对链环的受力分析

单一链环单元受力包括下端受到的拉力 F_i 和上端受到的拉力 F_{i+1} ，以及自身重力 $G_{环}$ （为了简化计算，忽略链环单元所受到的浮力），得到任一链环单元的受力平衡关系式如下式所示

$$\begin{cases} -G_{环} \frac{l_{环}}{2} \cos \theta_i - F_i \sin \varphi_i l_{环} \cos \theta_i + F_i \cos \varphi_i l_{环} \sin \theta_i = 0 \\ F_i \sin \varphi_i + G_{环} = F_{i+1} \sin \varphi_{i+1} \\ F_i \cos \varphi_i = F_{i+1} \cos \varphi_{i+1} \end{cases}$$

推导得 φ_i 和 θ_i 、 φ_{i+1} 之间的关系式

$$\begin{cases} \tan \theta_i = \tan \varphi_i - \frac{G_{环}}{2F_i \cos \varphi_i} & \text{①} \\ \tan \varphi_i + \frac{G_{环}}{F_i \cos \varphi_i} = \tan \varphi_{i+1} & \text{②} \end{cases} \quad (4)$$

最后，由式(4)求解出的拉力 F_i 、拉力方向与水平方向的夹角 φ_i ，利用迭代法对上式②进行迭代得到链环的受力方向斜角 φ_i ，再通过式①得到链环单元的轴向方向倾角 θ_i 。

值得注意的是，假设锚链共有 n 节链环，当推导至对最后一节链环受力分析，即第 n

节链环时，链环的受力情况改变（末端链接处悬挂了一重物球，增加竖直向下的拉力 $G_{球}$ ），受力分析图如图 6 所示。

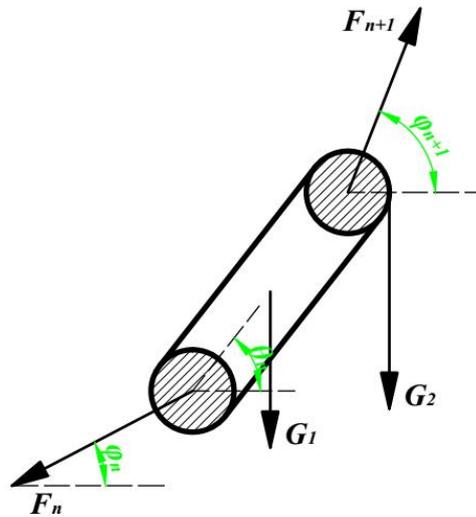


图 6 自下而上的最末端链环受力分析图

同理，推导得到 φ_n 和 θ_n 、 φ_{n+1} 之间的关系式如下

$$\begin{cases} \tan \theta_n = \tan \varphi_n - \frac{G_{环}}{2F_1 \cos \varphi_1} \\ \tan \varphi_n + \frac{G_{环} + G_{球}}{F_1 \cos \varphi_1} = \tan \varphi_{n+1} \end{cases} \quad (5)$$

进而利用迭代法得到最后一节链环首段受力方向倾角 φ_n ，以及最后一节链环的轴向方向倾角 θ_n 。

5.1.4 钢桶的受力分析

以钢桶为研究对象进行受力分析，受力分析如下图所示

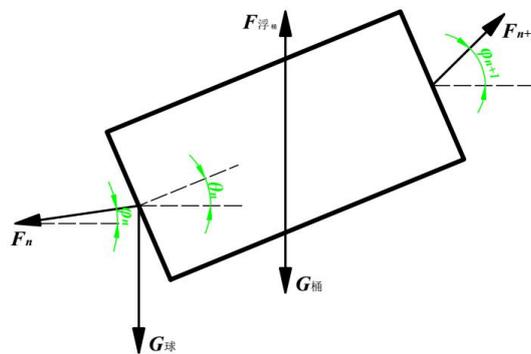


图 7 对钢桶的受力分析

钢桶受力包括钢桶两端张力（第 n 节链环对钢桶的拉力 F_{n+1} 和第 1 节钢管对钢桶的拉力 F_{n+2} ），重物球对钢桶的拉力 $G_{球}$ ，以及钢桶自身重力 $G_{桶}$ 和浮力 $F_{浮桶}$ ，受力平衡关系式如下式所示。

$$\begin{cases} -\left[(G_{\text{桶}} - F_{\text{浮桶}}) \frac{l_{\text{桶}}}{2} + G_{\text{球}} l_{\text{桶}} \right] \cos \theta_{n+1} - F_{n+1} \sin \varphi_{n+1} (\cos \theta_{n+1} + F_{n+1} \cos \varphi_{n+1} l_{\text{桶}} \sin \theta_{n+1}) = 0 \\ F_{n+1} \sin \varphi_{n+1} + G_{\text{桶}} + G_{\text{球}} + F_{\text{浮桶}} = F_{n+2} \sin \varphi_{n+2} \\ F_{n+1} \cos \varphi_{n+1} = F_{n+2} \cos \varphi_{n+2} \end{cases}$$

经过推导得到 φ_{n+1} 和 θ_{n+1} 、 φ_{n+2} 之间的关系式如下

$$\begin{cases} \tan \varphi_{n+1} + \frac{G_{\text{桶}} + G_{\text{球}} - F_{\text{浮桶}}}{F_1 \cos \varphi_1} = \tan \varphi_{n+2} \\ \tan \theta_{n+1} = \tan \varphi_{n+1} - \frac{G_{\text{桶}}/2 - F_{\text{浮桶}}/2 + G_{\text{球}}}{F_1 \cos \varphi_1} \end{cases} \quad (6)$$

进而利用迭代法得到钢桶的下端受力方向倾角 φ_{n+1} 、 φ_{n+2} 和钢桶轴向方向倾角 θ_{n+1} 。

5.1.5 钢管的受力分析

以钢管单元为研究对象进行受力分析，对钢管上端点求矩，如图 8 所示。

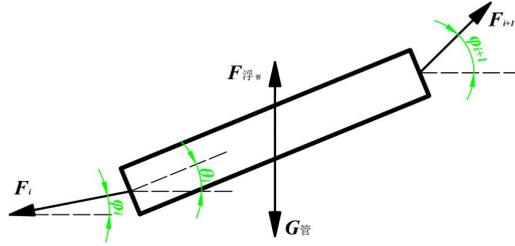


图 8 对钢管的受力分析

设共有 $n_{\text{管}}$ 节钢管，第 i 节钢管单元的受力包括钢管两端所受的张力 $F_{\text{管}_i}$ 和 $F_{\text{管}_{i+1}}$ ，以及自身重力 $G_{\text{管}}$ 和浮力 $F_{\text{浮管}}$ ，建立受力平衡方程式如下式

$$\begin{cases} -\frac{G_{\text{管}} - F_{\text{浮管}}}{2} l_{\text{管}} \cos \theta_i + F_{\text{管}_i} \sin \varphi_i l_{\text{管}} \cos \theta_i - F_{\text{管}_{i+1}} \cos \varphi_{i+1} l_{\text{管}} \sin \theta_i = 0 \\ F_{\text{管}_i} \sin \theta_i + G_{\text{管}} = F_{\text{管}_{i+1}} \sin \varphi_{i+1} + F_{\text{浮管}} \\ F_{\text{管}_i} \cos \theta_i = F_{\text{管}_{i+1}} \cos \varphi_{i+1} \end{cases}$$

经过推导得到 φ_i 和 θ_i 、 φ_{i+1} 之间的关系式如下式

$$\begin{cases} \tan \theta_i = \tan \varphi_i - \frac{G_{\text{管}} - F_{\text{浮管}}}{2 F_{\text{管}_i} \cos \varphi_i} \\ \tan \varphi_i + \frac{G_{\text{管}} - F_{\text{浮管}}}{F_{\text{管}_i} \cos \varphi_i} = \tan \varphi_{i+1} \end{cases} \quad (7)$$

同理，最后利用迭代法得到钢管单元的受力方向倾角 φ_i 和钢管单元的轴向方向倾角 θ_i 。

5.1.6 系统状态

钢桶和各节钢管的倾斜角度: 由图可知各段的轴向方向倾角是各段倾斜角度的余角, 根据上述模型可先求出钢桶和各节钢管的轴向方向倾角, 再得到钢桶和各节钢管的倾斜角度。

锚链形状: 由于锚链是由无数段链环组成, 每一节链环不可伸缩弯曲, 所以可将锚链的函数关系式看作由无数条直线函数表达式组成的分段函数。设每节链环的函数表达式为 $y = kx + b$ 。

首先, 根据上文所求得每一节链环受力方向竖直角 θ_i , 可求得每一节链环模拟直线的斜率为 $k = \tan \theta_i$ 。

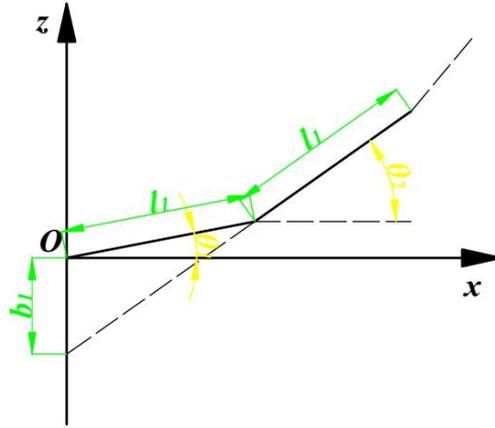


图9 截距

其次, 截距的求解由图9可知, 截距为 $b_i = -\tan \theta_{i+1} \sum_{j=1}^n l_{\text{环}} \cos \theta_j + \sum_{j=1}^n l_{\text{环}} \sin \theta_j$, 因此链环模拟直线的函数表达式为

$$y = \tan \theta_{i+1} x - \tan \theta_{i+1} \sum_{j=1}^n l_{\text{环}} \cos \theta_j + \sum_{j=1}^n l_{\text{环}} \sin \theta_j \quad \left(\sum_{j=0}^n l_{\text{环}} \cos \theta_j \leq x \leq \sum_{j=0}^{n+1} l_{\text{环}} \cos \theta_j \right) \quad (8)$$

浮标的吃水深度: 设每节链环的长度为 $l_{\text{环}}$, 则锚链在 z 轴方向的投影高度为

$$H_{\text{链}} = \sum_{i=1}^n l_{\text{环}} \sin \theta_i \quad i = 1, \dots, n$$

若钢桶的长度为 $l_{\text{桶}}$, 则钢桶在 z 轴方向的投影高度为

$$H_{\text{桶}} = l_{\text{桶}} \sin \theta_i \quad i = n+1$$

若每节钢管的长度为 $l_{\text{管}}$, 则钢管在 z 轴方向的投影高度为

$$H_{\text{管}} = \sum_{i=n+2}^{n+n_{\text{管}}+1} l_{\text{管}} \sin \theta_i \quad i = n+2, \dots, n+n_{\text{管}}+1$$

由上可知, 锚链、钢桶、钢管在 z 轴方向的总投影高度为

$$H_{\text{总}} = H_{\text{链}} + H_{\text{桶}} + H_{\text{管}} = \sum_{i=1}^n l_{\text{环}} \sin \theta_i + l_{\text{桶}} \sin \theta_i + \sum_{i=n+2}^{n+n_{\text{管}}+1} l_{\text{管}} \sin \theta_i$$

设该型传输节点布放在水深 H_0 的海域, 则水深 H_0 为

$$H_0 = H_{\text{链}} + H_{\text{桶}} + H_{\text{管}} + h = \sum_{i=1}^n l_{\text{环}} \sin \theta_i + l_{\text{桶}} \sin \theta_i + \sum_{i=n+2}^{n+n_{\text{管}}+1} l_{\text{管}} \sin \theta_i + h \quad (9)$$

求解浮标的游动区域:

$$\text{锚链在 } x \text{ 轴方向上的投影长度为 } x_{\text{链}} = \sum_{i=1}^n l_{\text{环}} \cos \theta_i \quad i=1, \dots, n$$

$$\text{钢桶在 } x \text{ 轴方向上的投影长度为 } x_{\text{桶}} = l_{\text{桶}} \cos \theta_i \quad i=n+1$$

$$\text{钢管在 } x \text{ 轴方向上的投影长度为 } x_{\text{管}} = \sum_{i=n+2}^{n+n_{\text{管}}+1} l_{\text{管}} \cos \theta_i \quad i \in [n+2, n+n_{\text{管}}+1]$$

因此浮标的极限游动半径为

$$R = x_{\text{链}} + x_{\text{桶}} + x_{\text{管}} + d/2 = \sum_{i=1}^n l_{\text{环}} \cos \theta_i + l_{\text{桶}} \cos \theta_i + \sum_{i=n+2}^{n+n_{\text{管}}+1} l_{\text{管}} \cos \theta_i + d/2 \quad (10)$$

即浮标在以半径为 R 的圆形区域内游动（海平面上），轨迹方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ z = H \end{cases}$$

5.1.7 模型的求解

将公式(5) (6) (7)代入公式(8)，得到关于吃水深度 h 的方程，利用 *Matlab* 编程（程序见附录），采用逐步求精搜索出海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度和最大游动半径，具体结果如下表所示。

表 1 风速为 12m/s 时的求解结果

	1	0.52521°	底层锚链夹角	0°
钢管倾角	2	0.52356°	钢桶倾角	0.52725°
	3	0.52192°	游动区域	14.25988
	4	0.52028°	吃水深度	0.73688

表 2 风速为 24m/s 时的求解结果

	1	2.03976°	底层锚链夹角	0°
钢管倾角	2	2.03346°	钢桶倾角	2.04752°
	3	2.02720°	游动区域	17.26319
	4	2.02098°	吃水深度	0.75103

海面风速为 12m/s 和 24m/s 时的锚链形状如下图所示。

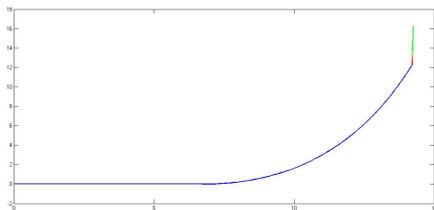


图 10 海面风速为 12m/s 时的锚链形状

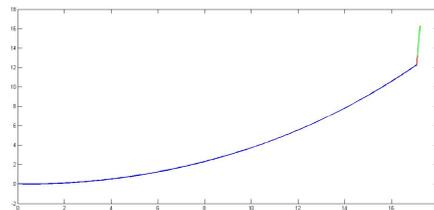


图 11 海面风速为 24m/s 时的锚链形状

5.1.8 模型的误差检验

在上文吃水深度 h 的求解过程中，总体思路是用吃水深度 h 表示锚链、钢桶、钢管的倾斜角度，再根据水深等于浮标的吃水深度与锚链、钢桶、钢管在竖直方向的投影高度的总和，求得浮标的吃水深度值。为了验证模型的可靠度，在求解出浮标的吃水深度后，依次计算得到锚链、钢桶、钢管的受力和倾角，根据最上端一根钢管的受力，可以对浮标进行受力分析，从而求得浮标的吃水深度。将其与之前求解的浮标吃水深度进行对比。

对浮标进行受力分析，受力分析图如下所示。

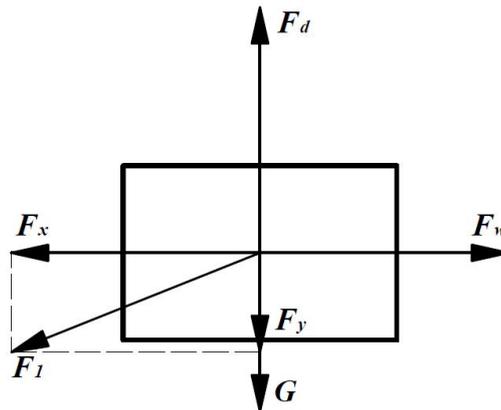


图 12 浮标受力分析图

浮标受力包括浮力，重力，风荷载以及最后一节钢管对其的拉力（大小等于最后一节钢管的末端所受拉力），由平衡方程关系式可以解得吃水深度 h' ，误差率为 $\delta = |h' - h|/h$ ，其对比结果如下表所示。

表 3 吃水深度误差

风速	h	h'	δ
12m/s	0.73688	0.73095	-0.0080380
24m/s	0.75103	0.74528	-0.0076527

5.2 问题二的分析与求解

5.2.1 风速为 36m/s 时的系统状态

在问题 1 的假设下，利用问题一的模型计算得出海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、和浮标的最大游动半径，结果见下表。

表 4 风速为 36m/s 时的求解结果

底层锚链夹角	17.83892°	钢桶倾角	4.40762°
1	4.39138°	游动区域	18.42819
钢管倾角	2	吃水深度	0.77168
3	4.37821°	校验吃水深度	0.766195246
4	4.36511°	吃水深度误差率	-0.0071050
	4.35209°		

海面风速为 36m/s 时锚链形状见下图

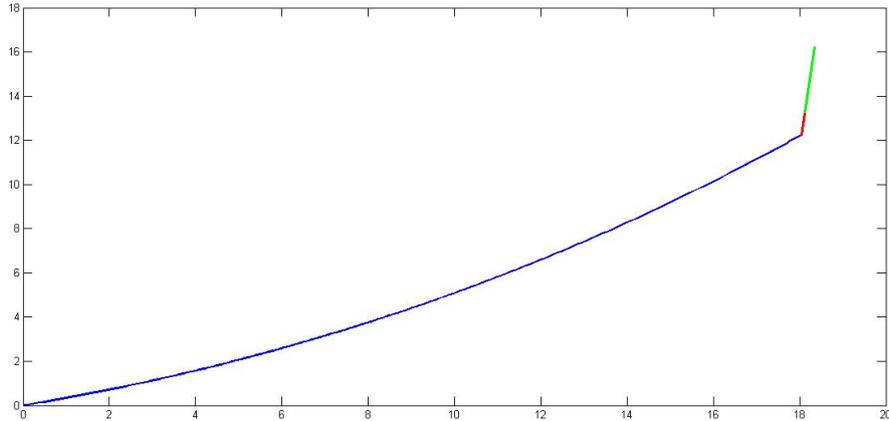


图 13 海面风速为 36m/s 时的锚链形状

5.2.2 重物球质量求解

1、求解思路

第二小问是在问题一的基础上，通过已经建立的各段首端轴向方向倾角和受力方向倾角、末端轴向方向倾角之间关系的数学模型，将重物球看作是外力施加在整个系统上，推导得到重物球的质量与锚链在锚点夹角、钢桶轴向方向倾角的关系式。此关系式反映了锚链在锚点夹角与钢桶轴向方向倾角之间的变化规律，由变化规律可知随着重物球的质量的增加，锚链在锚点与海床的夹角与钢桶轴向方向倾角逐渐减小，又由计算可知海面风速为 36m/s 时倾斜角度小于 5 度，结合变化规律可知问题二中钢桶的倾斜角度一定不超过 5 度，因此问题二仅需考虑锚链在锚点与海床的夹角的限制条件。假设锚链在锚点与海床的夹角为极限情况 16 度，再建立重物球的质量与吃水深度的关系式，根据问题一的数学模型求解出极限情况下的吃水深度，进而得到极限情况下重物球的质量，即满足条件的最小重物球质量。

2、确定重物球的质量和锚链在锚点与海床的夹角、钢桶的倾斜角度的关系

首先，将重物球看作是外力施加在整个系统上，并通过推导得到重物球的质量 $m_{球}$ 和锚链在锚点与海床的夹角 θ_1 、钢桶轴向方向斜角 θ_{n+1} 的关系式。根据在问题一中推导的任一链环 φ_i 和 θ_i 、 φ_{i+1} 之间的关系式以及最后一节链环 φ_n 和 θ_n 、 φ_{n+1} 之间的关系式可知

$$\begin{cases} \tan \varphi_i + \frac{G_{环} + G_{球}}{F_1 \cos \varphi_i} = \tan \varphi_{i+1} \\ \tan \theta_{i+1} = \tan \varphi_{i+1} - \frac{G_{环}}{2F_1 \cos \varphi_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

即 $\tan \varphi_i + \frac{G_{球}}{F_1 \cos \varphi_i} + \frac{G_{环}}{2F_1 \cos \varphi_i} = \tan \varphi_{i+1}$ 。又由式(5)可知递推关系式

$$\tan \varphi_i = \tan \varphi_{i-1} + \frac{G_{环}}{F_1 \cos \varphi_i}$$

由迭代法递推可得

$$\begin{cases} \tan \varphi_1 + \frac{(i-1)G_{\text{环}}}{F_1 \cos \varphi_1} + \frac{G_{\text{环}}}{2F_1 \cos \varphi_1} + \frac{G_{\text{球}}}{F_1 \cos \varphi_1} = \tan \theta_{i+1} \\ \tan \theta_1 = \tan \varphi_1 - \frac{G}{2F_1 \cos \varphi_1} \end{cases}$$

化简得

$$\tan \theta_1 + \frac{iG_{\text{环}}}{F_1 \cos \varphi_1} + \frac{G_{\text{球}}}{F_1 \cos \varphi_1} = \tan \theta_{i+1}$$

又 $G_{\text{球}} = m_{\text{球}}g$ ，故得重物球的质量 $m_{\text{球}}$ 与锚链与海床夹角 θ_1 、钢桶倾角 θ_{n+1} 的关系式为

$$m_{\text{球}} = \frac{F_1 \cos \varphi_1 \tan \theta_{n+1}}{g} - \frac{F_1 \cos \varphi_1 \tan \theta_1}{g} - \frac{nG_{\text{环}}}{g} \quad (11)$$

此关系式反映了锚链在锚点与海床的夹角 θ_1 与钢桶的倾斜角度 $\theta_{\text{桶}} (\pi/2 - \theta_{n+1})$ 之间的变化规律，即随着重物球的质量 $m_{\text{球}}$ 的增加锚链在锚点与海床的夹角 θ_1 与钢桶的倾斜角度 $\theta_{\text{桶}}$ 逐渐减小。

3、减少约束条件

在问题一的假设下计算已得知海面风速为 36m/s 时倾斜角度小于 5 度，锚链在锚点与海床的夹角超过 16 度，由变化规律可知问题二中钢桶的倾斜角度一定不超过 5 度，因此问题二仅需考虑锚链在锚点与海床的夹角 θ_1 的限制条件。假设 θ_1 为极限情况 16 度，通过固定重物球的质量与吃水深度 h 的关系以及第一问的递推关系式，求得重物球的质量和吃水深度。

4、确定固定重物球的质量与吃水深度的关系

将锚链、钢桶、钢管、浮标看作一个整体，进行受力分析，整体受力包括荷载 $F_{\text{风}}$ ，以及自身重力 G 和浮力 $F_{\text{浮}}$ （为了简化计算，略去锚链和重物球所受到的浮力，仅考虑钢桶、钢管、浮标所受到的浮力）如下图 所示。

其中，锚链、钢桶、钢管、浮标的重力分别是 $G_{\text{链}}$ 、 $G_{\text{桶}}$ 、 $G_{\text{管}}$ 、 $G_{\text{标}}$ ，锚链在锚点与海床的夹角为 θ_1 ，将锚对系统的拉力 F_1 分解为沿 x 轴方向的水平分力 F_x 和沿 z 轴方向的水平分力 F_z ，整体受力平衡关系式如下式所示。

$$\begin{cases} F_{\text{浮}} + F_z = F_{\text{拉}} + G_{\text{总}} \\ F_{\text{风}} = F_x \\ F_{\text{拉}} = G_{\text{球}} = m_{\text{球}}g \\ F_{\text{浮}} = \rho g (V_{\text{桶}} + V_{\text{管}} + V_{\text{标}}) \\ G_{\text{总}} = G_{\text{链}} + G_{\text{桶}} + G_{\text{管}} + G_{\text{标}} \\ F_{\text{风}} = 0.625Sv^2 \end{cases}$$

由 $\tan \theta_1 = \frac{F_z}{F_x} = \frac{F_{\text{拉}} - G_{\text{总}} - F_{\text{浮}}}{F_{\text{风}}}$ ，又 $F_{\text{拉}} = m_{\text{球}}g = F_{\text{风}} \tan \theta_1 + F_{\text{浮}} - G_{\text{总}}$ ，可得重物球的质量 $m_{\text{球}}$ 与吃水深度 h 的关系式

$$\begin{aligned} m_{\text{球}} &= \frac{F_{\text{风}} \tan \theta_1 + F_{\text{浮}} - G_{\text{总}}}{g} \\ &= \frac{0.625Sv^2 \tan \theta_1 - G_{\text{总}}}{g} + \rho(\pi l_{\text{桶}} \frac{d_{\text{桶}}^2}{4} + \pi l_{\text{管}} n_{\text{管}} \frac{d_{\text{管}}^2}{4} + \pi h \frac{d_{\text{标}}^2}{4}) \end{aligned} \quad (12)$$

由于 $h \in [0,2]$ ，所以根据(12)式可得重量球质量上限。

5、重物球质量范围的确定

最后在问题一的数学模型的基础上，已知初始拉力方向竖直角 φ_1 和浮标的吃水深度，初始拉力 F_1 关于吃水深度 h 的关系式，代入问题一的模型求解出极限情况下的吃水深度，再根据重物球的质量与吃水深度的关系式求出极限情况下重物球的质量，即满足条件的最小重物球质量。

利用 *Matlab* 编程求解得到最小重物球质量为 $m_{球_{min}} = 1630.8851kg$ ，即只要重物球的质量满足 $m_{球} \geq 1630.8851kg$ ，就可以使得海面风速为 $36m/s$ 时钢桶的倾斜角度不超过 5 度，锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。求解得到钢桶和各节钢管的倾斜角度、和浮标的最大游动半径，结果见下表。

表 5 风速为 $36m/s$ 时控制倾角的求解结果

底层锚链夹角	16.00000°	钢桶倾角	3.07277°
1	3.06419°	游动区域	18.32894
钢管倾角	2	吃水深度	0.86864
3	3.05721°	校验吃水深度	0.864799413
4	3.05027°	吃水深度误差率	-0.0044237
重量球质量	1630.8851		

球加重后锚链形状如下图所示

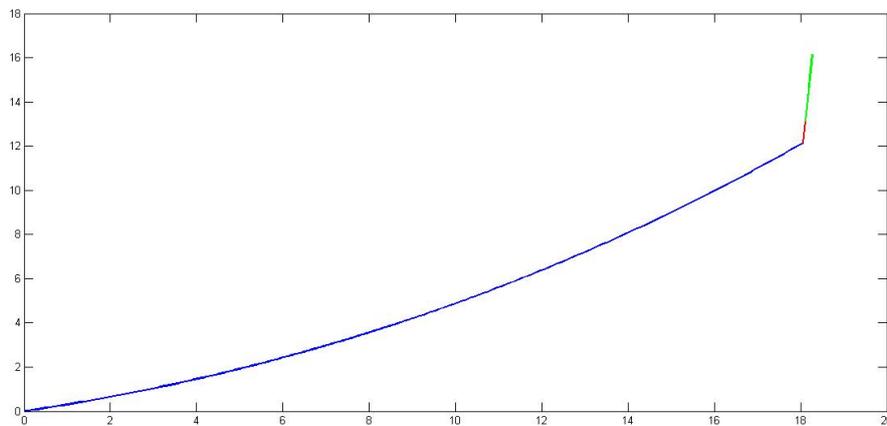


图 14 球加重后的海面风速为 $36m/s$ 时的锚链形状

5.3 对问题三的分析与求解

5.3.1 考虑水流影响的系泊系统分析

根据系泊系统的设计问题有锚链的型号、锚链的长度、重物球的质量、浮标的吃水深度、游动区域和钢桶的倾斜角度多个指标，分别考虑五种不同型号的锚链，取锚链的长度和重物球的质量为决策变量，以锚链的型号为约束条件，建立了以浮标的吃水深度、游动区域和钢桶的倾斜角度为目标函数的多目标规划数学模型，根据多目标规划分析方法，利用 *Matlab* 进行数值计算，得到多目标优化解（帕累托解）。

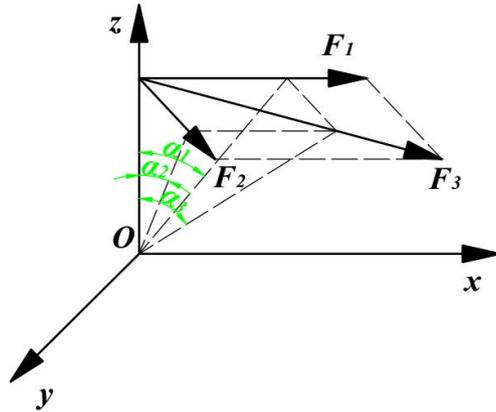


图 15 合力与倾角关系

在问题三中，不仅要考虑风荷载，还要考虑水流力的作用。这两个空间力在并不一定是共线的，这就在求解产生了麻烦。但根据理论实践可知，在空间直角坐标系中一物体受到多个力作用，力的大小越大；力矢量方向末端和原点的连线与 z 轴正方向的夹角越大（即被作用的物体倾角与端点受力成正比）。如图所示， F_3 是 F_1 与 F_2 的合力，当 F_1 与 F_2 共线时，合力 F_3 最大，合力 F_3 与 z 轴正方向的夹角亦是最大。换句话说，当风荷载与水流力方向一致时，钢桶的倾斜角度最大。由此本文只考虑这种对倾角最不利的状态进行求解，将三维空间问题转化为二维平面问题。

由于钢管的体积较小，这里忽略水流力对其的作用，只考虑水流力作用在浮标和钢桶上。水流力的近似计算公式为

$$F_{\text{水}} = 374Sv_{\text{水}}^2 \quad (13)$$

其中， S 为物体在水流速度法平面的投影面积。记浮标所受的水流力为 $F_{\text{水}1}$ ，在水流速度法平面的投影面积为 $S_{\text{水}1}$ ；钢桶受到的水流力为 $F_{\text{水}2}$ ，在水流速度法平面的投影面积为 $S_{\text{水}2}$ 。由图可知， $S_{\text{水}1} = hd_{\text{标}}$ ， $S_{\text{水}2} = \pi \cos \theta_{n+1} d_{\text{桶}}^2 / 2 + l_{\text{桶}} d_{\text{桶}} \sin \theta_{n+1}$ 。

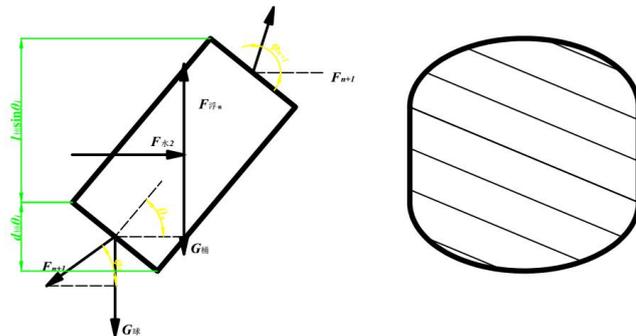


图 16 对钢桶的受力分析及水流速度发平面的投影面积

对浮标和钢管（钢管数量可根据选取不同数量）系统进行受力分析，如图 所示，得

$$\begin{cases} F_{\text{风}} + F_{\text{水}} = F_i \cos \varphi \\ G_{\text{标}} + F_i = F_{\text{浮标}} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} F_i = \frac{F_{\text{浮标}} - G_{\text{标}} + (n + n_{\text{管}} + 2 - i)G_{\text{管}}}{\sin \varphi_i}, i = n + 2, \dots, n + n_{\text{管}} + 2 \\ \tan \theta_i = \tan \varphi_i - G_{\text{管}} - F_{\text{浮标}} \end{cases} \quad (14)$$

对钢桶进行如图所示的受力分析，得到

$$\begin{cases} F_{n+2} \cos \varphi_{i+1} + F_{\text{水2}} - F_{n+1} \cos \varphi_{n+1} = 0 \\ F_{n+2} \sin \varphi_{i+1} - F_{n+1} \sin \varphi_{n+1} - G_{\text{球}} - G_{\text{桶}} = 0 \\ -\frac{l_{\text{桶}}}{2} G_{\text{球}} \cos \theta_{n+1} - \frac{l_{\text{桶}}}{2} F_{n+1} \sin \varphi_{n+1} \cos \theta_{n+1} + \frac{l_{\text{桶}}}{2} F_{n+1} \cos \varphi_{n+1} \sin \theta_{n+1} \\ + \frac{l_{\text{桶}}}{2} F_i \cos \varphi_{n+2} \sin \theta_{n+1} - \frac{l_{\text{桶}}}{2} F_{i+1} \sin \varphi_{n+2} \cos \theta_{n+1} = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \tan \varphi_{n+2} = \frac{F_{n+1} \sin \varphi_{n+1} + G_{\text{球}} + G_{\text{桶}}}{F_{n+1} \sin \varphi_{n+1} - F_{\text{水2}}} \\ \tan \theta_{n+1} = \frac{G_{\text{球}} + F_{n+1} \sin \varphi_{n+1} + F_{n+2} \sin \varphi_{n+2}}{F_i \cos \varphi_{n+1} + F_{n+2} \cos \varphi_{n+2}} \end{cases} \quad (16)$$

5.3.2 系统参数与系统状态变量的关系

经分析可推导出各变量之间的关系（详细推导过程见附录）。

命题 1 系统状态与参数满足如下关系

	游动范围	钢桶倾角	吃水深度
锚链长度 l	单调递增	单调递增	先增后减
重物球质量 m	单调递减	单调递减	单调递增
水深 H_0	单调递减	单调递减	单调递增

根据 5.3.1 的模型计算不同参数情况下的系统状态，如表 6 所示。

表 6 述例结果

	底角(°)	钢桶倾角(°)	吃水深度(m)	游动范围(m)	
型号	I	29.832	4.222	0.785	19.147
	II	24.493	3.980	0.799	19.104
	III	16.905	3.599	0.821	18.762
	IV	6.764	3.069	0.850	18.406
	V	0.000	2.308	0.889	17.672
重物球质量 m	1000	24.831	5.657	0.738	19.188
	1200	24.493	3.980	0.799	19.104
	1400	24.155	2.555	0.861	19.050
	1600	23.909	1.242	0.922	18.998
	1800	31.448	0.475	1.002	17.520

锚链 长度 l	20		30.344		3.823		0.808		16.544
	21	单调 减	27.231	单调 增	3.912	单调 减	0.803	单调 增	17.851
	22		24.493		3.980		0.799		19.104
	23		22.124		4.034		0.796		20.225
	24	19.760	4.080	0.793	21.431				
水深 H_0	16		17.268		4.243		0.784		20.305
	17	单调 增	20.773	单调 减	4.119	单调 增	0.791	单调 减	19.745
	18		24.493		3.980		0.799		19.104
	19		28.267		3.830		0.808		18.408
	20	32.353	3.653	0.818	17.601				

(注：底角即锚链在锚点与海床的夹角)

由表 6 可知

- ① 实验数据所显示的系统参数与状态变量之间的变化规律，与命题 1 的结论相符；
- ② 锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角受锚链型号的影响较大。为了保证其夹角尽可能不超过 16° ，本文选取 IV 型号的锚链。接下来考虑重物球重力和锚链长度对系统状态变量的影响。

5.3.3 多目标的系统优化设计

系泊系统设计可以看作多目标的系统优化问题，即确定锚链的型号、长度 l 和重物球质量 m 这三个系统参数，使得浮标的吃水深度 h 和游动区域 R 及钢桶的倾斜角度 $\theta_{\text{桶}}$ 这三个系统状态量达到最优（尽量小）。建立多目标优化模型如下。

$$\begin{aligned}
 & \min h(m, l) \\
 & \min R(m, l) \\
 & \min \theta_{\text{桶}}(m, l) \\
 & \text{s.t. } \theta_1(m, l) \leq 16^\circ
 \end{aligned}$$

由于水深 16m~20m 之间，系泊系统的浮标吃水深度、浮标游动区域半径和钢桶倾斜角度不确定，根据命题 1，游动半径、钢桶倾角、吃水深度分别关于水深单调减、单调减、单调增。即水越深，浮标吃水深度越大，浮标游动区域半径和钢桶倾斜角度越小，因此用最小水深时的浮标游动区域半径 R^s 和钢桶倾斜角度 $\theta_{\text{桶}}^s$ 、最大水深 h^d 时的浮标吃水深度作为优化目标。

$$\begin{aligned}
 & \min h^d(m, l) \\
 & \min R^s(m, l) \\
 & \min \theta_{\text{桶}}^s(m, l) \\
 & \text{s.t. } \theta_1^d(m, l) \leq 16^\circ
 \end{aligned}$$

根据命题 1，重物球质量、锚链长度以及水深对系统状态变量（即三个目标）的影响并非是同向的，因此，模型不存在完全帕累托解，即系统设计不存在理想解。为保证设备的工作效果，可令钢桶倾角小于 5° 作为约束条件，将上述问题转化为双目标规划问题。

$$\begin{aligned}
 & \min h^d(m, l) \\
 & \min R^s(m, l) \\
 & \text{s.t. } \begin{cases} \theta_1^d(m, l) \leq 16^\circ \\ \theta_{\text{桶}}^s(m, l) \leq 5^\circ \end{cases}
 \end{aligned}$$

解决这类问题的方法很多，本文采用将某一目标转化为约束条件的方法，即令吃水深度 h 小于某一吃水深度值 h_0 作为约束条件进行处理。

$$\begin{aligned} & \min R^s(m, l) \\ & s.t. \begin{cases} \theta_1^d(m, l) \leq 16^\circ \\ \theta_{桶}^s(m, l) \leq 5^\circ \\ h^d(m, l) \leq h_0 \end{cases} \end{aligned}$$

首先取 $m \in [1000, 2200]$ ， $l \in [20, 28]$ 进行初步求解，得到拐点对应的坐标值分别为 $h_0 = 1.06969\text{m}$ ， $R = 20.27155\text{m}$ 。再取 $m \in [1200, 1600]$ ， $l \in [20, 24]$ 进行进一步求解，得到拐点对应的坐标值分别为 $h_0 = 0.92204\text{m}$ ， $R = 19.28320\text{m}$ 。此时，浮标的吃水深度 $h = 0.92202\text{m}$ ，重量球的质量 $m = 1862.46246\text{kg}$ ，锚链的长度 $l = 25.74975\text{m}$ 。

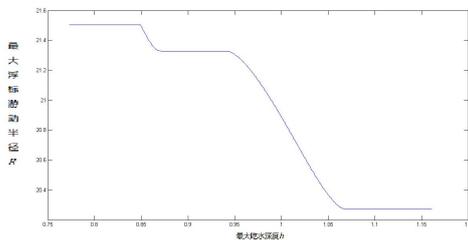


图 17 粗选阶段的 $h_0 - R$ 曲线

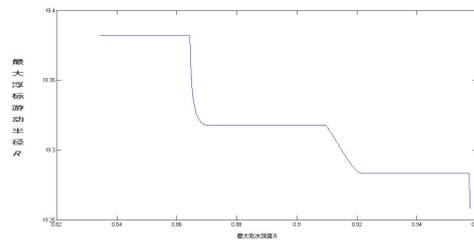


图 18 细选阶段的 $h_0 - R$ 曲线

由图 18 可知，随着吃水深度的增加，浮标游动半径减小。图示曲线即为吃水深度和浮标游动半径的 Pareto 最优边界。

§6 模型的误差分析

- 由于锚链和重物球的具体形状和体积不清楚，无法确定它们的浮力，求解过程中为了简化计算，略去其浮力，导致求得的初始拉力存在误差；
- 忽略链环之间是相互连接的，实际上由于链环的连接方式计算出的链环节数小于链环的实际节数，存在误差；
- 将水流速度看作恒定，实际上由于海水层的压力分布不均匀，海水各层次的水流速度不相等，存在误差；

§7 模型的评价与改进

7.1 模型的优点

- 本文的模型对悬链式方程进行了改进，不仅考虑了锚对系统竖直方向上的拉力，而且考虑了链环沉入海床的情况，最后通过平面任意力系平衡方程求解，使求得的各段拉力更加准确；
- 分别从整体和局部出发进行受力分析，检验了模型的误差；
- 采用了迭代法，可研究任意段轴向方向和受力方向与水平方向的夹角；
- 发掘隐含条件，通过推导得到重物球质量和锚链在锚点与海床的夹角、钢桶的倾斜

角度的关系，减少约束条件，简化求解过程；

- 在平面任意力系平衡方程的数学模型的基础上，发现锚链长度、重物球质量对浮标吃水深度、游动区域和钢桶倾斜角度的影响，减少系泊系统设计指标的目标个数，使问题的求解过程更加简单。

7.2 模型的缺点

- 忽略链环连接点的重叠部分，导致计算出的链环节数小于链环的实际节数，存在误差；
- 假设浮标水平，没有考虑浮标的倾斜；
- 将水流速度看作恒定不变，与实际情况有一定的出入，因此求得的近海水流力只是近似值，与实际值必有一定的误差。

7.3 模型的改进

- 假设重物球的材质，根据材质的密度计算重物球的体积，在模型中加入重物球的浮力影响，改进模型的精度；
- 假设链环重叠的长度为 l_s ，根据关系式 $nl_{环} - (n-1)l_s = l_{链}$ ，重新计算链环的个数为 $n = \frac{l_{链} - l_s}{l_{环} - l_s}$ ，提高模型的精度；
- 考虑实际情况下海水各层次的水流速度不相等，根据伯努利方程 $P + \rho v^2 / 2 + \rho gh = c$ [3]（ P 为压强， ρ 为海水密度， v 为海水流速， h 为该层次距海面深度， c 为常数），海水各层次的水流速度，得到更为准确的近海水流力。

§8 参考文献

- [1] 百度百科.悬链线.<http://baike.baidu.com/link?url=AJsZ4hVM4rsbaqRveUyNJcVksx7dCZ7STgA18Px2GJf3smDmQIoWsz59wwRDFZv1fmtOaEQKmgLQ4D8dKoqx9q>
- [2] 胡晓芳，丁德勇.锚链直径对船舶锚泊能力的影响[J].中国舰船研究，2014,9(4):109-122,119.
- [3] 百度百科.伯努利原理.[http://baike.baidu.com/link?url=P1SgmD7AT5P0kjFpYs0YU5LT0UlzRNvdOuNqnkKSxPqnqua9deB6Ux3dapM0d5dkI3S8DMAmfnjQue0xU8jGpN4N4beEsLvv3ajvku4ZBg6WCsETXqs5E2BxUKCfOXwdQHvy--6_sf0TvFgQqXDQkMz-J3a2agV6165MLyCZ2PK8x8cpJBm5J_WyWyaSnl-.\[2016-9-12\]](http://baike.baidu.com/link?url=P1SgmD7AT5P0kjFpYs0YU5LT0UlzRNvdOuNqnkKSxPqnqua9deB6Ux3dapM0d5dkI3S8DMAmfnjQue0xU8jGpN4N4beEsLvv3ajvku4ZBg6WCsETXqs5E2BxUKCfOXwdQHvy--6_sf0TvFgQqXDQkMz-J3a2agV6165MLyCZ2PK8x8cpJBm5J_WyWyaSnl-.[2016-9-12])

附 录

附录 1: 命题 1 的推导过程

重物球质量、锚链长度、水深对游动范围、钢桶倾角、吃水深度的影响

一、重物球质量

(1) 重物球质量对游动范围的影响

游动范围主要由 $\sum_{i=1}^n l_i \cos \theta_i + \frac{d}{2}$ 决定。

根据各个部分的角度递推式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \varphi_{i+1} = \frac{F_i \sin \varphi_i + G_{\text{桶}} + G_{\text{球}}}{F_i \cos \varphi_i - F_{\text{水}2}} \\ \tan \theta_i = \tan \varphi_i - \frac{G_{\text{环}}}{2F_i \cos \varphi_i} \\ \tan \theta_i = \frac{G_{\text{钢桶}} + F_i \sin \varphi_i + F_{i+1} \sin \varphi_i}{F_i \cos \varphi_i + F_{i+1} \cos \varphi_{i+1}} \\ \tan \theta_i = \tan \varphi_{i+1} - \frac{G_{\text{管}} - F_{\text{浮管}}}{F_1 \cos \varphi_1} \end{array} \right.$$

可以得出:

$$m_{\text{球}} g = \left(\sum_{i=1}^n \tan \theta_i + \frac{(n-1)G_{\text{环}}}{2F_i \cos \varphi_i} - 1 + \frac{G_{\text{管}} - F_{\text{浮管}}}{F_1 \cos \varphi_1} \right) (F_i \cos \varphi_i + F_{i+1} \cos \varphi_{i+1})$$

由此可以得出重物球质量与 θ_i 呈正相关, 由于游动范围与 θ_i 呈负相关, 所以重物球与游动范围呈单调增。

(2) 重物球对钢桶倾角的影响

根据对钢桶的倾角分析:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \varphi_i = \tan \theta_i + \frac{G_{\text{环}}}{2F_1 \cos \varphi_1} \\ \tan \varphi_{i+1} = \frac{F_i \sin \varphi_i + G_{\text{球}} + G_{\text{桶}}}{F_i \cos \varphi_i - F_{\text{水}2}} \end{array} \right.$$

可以得出钢桶角对重物球的关系式:

$$m_{\text{球}} g = (F_i \cos \varphi_i - F_{\text{水}2}) \tan \varphi_{i+1} - F_i \sin \varphi_i - G_{\text{桶}}$$

发现重力球与钢桶倾角 φ_{i+1} 呈正相关。

(3) 重物球对吃水深度的影响

将锚链, 钢桶, 钢管, 浮标看做一个整体, 对该系统进行受力分析。

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\text{浮桶+标}} = F_{\text{拉}} + G_{\text{链+桶+管+标}} + F_1 \sin \varphi_1 \\ F_1 \cos \varphi_1 = F_{\text{水}2} \\ F_{\text{浮标}} = \rho g h \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \end{array} \right.$$

可以得出球的质量和吃水深度的关系：

$$m_{\text{球}}g = \rho gh\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 - G_{\text{浮桶+标}} - G_{\text{管}} - G_{\text{桶}} - F_i \cos \varphi_i$$

所以重物球质量与吃水深度 h 呈正相关。

二、锚链长度

1. 锚链为每个环的链环之和，其中链环长度与锚到浮标的距离正相关：

$$L_{\text{链}} = \sum_{i=1}^n l_{\text{环}_i} \propto h \cot \theta$$

可以得知链长与 θ 成正比

(1) 锚链长度对游动范围影响

其中锚链对应各个部分的 θ ，均与其成正比

$$l = \sum_{i=1}^n l_{\text{环}_i} \cos \theta_i + l_{\text{桶}} \cos \theta + \sum_{j=1}^n l_{\text{管}_j} \cos \theta_j + \frac{d}{2}$$

由此可得 $L_{\text{链}}$ 与 l 对应成正比。

(2) 锚链长度对钢桶倾角

对最后一个环链进行受力分析，可得：

$$\begin{cases} \tan \varphi_n = \tan \varphi_{n+1} - \frac{G_{\text{环}} + G_{\text{球}}}{F_1 \cos \varphi_1} \\ \tan \theta_1 = \tan \varphi_1 - \frac{G_{\text{环}}}{2F_i \cos \theta_i} \end{cases}$$

由此可得出钢桶倾斜角 φ_{n+1} 与 θ 的关系

$$\tan \varphi_{n+1} = \tan \theta + \frac{nG_{\text{环}} + G_{\text{球}}}{F_1 \cos \varphi_1}$$

钢桶倾斜角 φ_{n+1} 与 θ 呈正相关，所以倾角与 l 呈单调递增。

(3) 锚链对吃水深度的影响

对于总体进行受力分析，并根据首个环链的计算公式的

$$\begin{cases} F_1 \sin \varphi_1 + G_{\text{总}} = F_{\text{浮总}} \\ F_1 \cos \varphi_1 = F_{\text{水}_1} + F_{\text{水}_2} + F_{\text{风}} \\ \tan \theta_i + \frac{G_{\text{环}}}{2F_1 \cos \varphi_1} = \tan \varphi_i \\ F_{\text{浮总}} = \rho g (V_{\text{桶}} + V_{\text{钢管}} + V_{\text{标排}}) \\ V_{\text{标排}} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h \\ F_{\text{风}} = 0.625 \times S (V_{\text{标}} - V_{\text{标排}})^2 \\ F_{\text{水}_1} + F_{\text{水}_2} = 374 \times S (V_{\text{桶}} + V_{\text{标排}})^2 \end{cases}$$

得出 θ 与吃水深度的关系：

$$\tan \theta = \frac{F_{\text{浮总}} - G_{\text{总}}}{F_{\text{水}_1} + F_{\text{水}_2} + F_{\text{风}}} - \frac{G_{\text{环}}}{2F_i \cos \varphi_i}$$

发现 θ 与吃水深度的函数关系式，发现吃水深度对于锚链长度 l 先增后减。

三、海水深度

通过计算海水深度的表达式，发现 H 与 θ 在对应角度内成正比：

$$H = \sum_{i=1}^n l_i \sin \theta_i + h$$

(1) 海底深度对游动范围影响

计算出游动范围的表达式：

$$L_{\text{游}} = \sum_{i=1}^n l_i \cos \theta_i + \frac{d}{2}$$

发现游动范围 $L_{\text{游}}$ 与 θ 在合适范围内单调减，由此可以推导出游动范围 $L_{\text{游}}$ 与海水深度 H 单调递减。

(2) 海底深度对钢桶倾斜角的影响

通过公式①对钢桶的角度 θ_i 分析， φ_i 对于 θ_i 单调递增，②可以得出 φ_i 与锚链角之间的递推关系，③可以得出锚链受力角 φ_i 与 θ_i 的关系。

$$\begin{cases} \tan \theta_i = \frac{G_{\text{球}} + F_i \sin \varphi_i + F_i \sin \varphi_{i+1}}{F_i \cos \varphi_i + F_{i+1} \cos \varphi_{i+1}} \\ \tan \varphi_{i-1} = \tan \varphi_i + \frac{G_{\text{环}}}{F_1 \cos \varphi_1} \\ \tan \theta_i = \tan \varphi_i - \frac{G_{\text{环}}}{2F_1 \cos \varphi_1} \end{cases}$$

由此可得出：

$$\tan \theta_i = \frac{G_{\text{球}} + F_i (\tan \theta_{i-1} - \frac{G_{\text{环}}}{2F_1 \cos \varphi_1}) + F \frac{\sin \varphi_{i+1}}{\cos \varphi_i}}{F_i + F_{i+1} \cos \varphi_{i+1}}$$

钢桶倾角 θ_i 与锚链角 θ_{i-1} 之间的关系，单调递增。

$$\tan \theta_i = \tan \theta_{i-1} - \frac{G_{\text{环}}}{F_1 \cos \varphi_1}$$

各个锚链角之间单调增，所以可得钢桶倾斜角与各个锚链角单调增，由于大部分为锚链部分，并且钢管部分递推式为：

$$\begin{cases} \tan \varphi_i = \tan \varphi_{i+1} - \frac{G_{\text{管}} - F_{\text{浮管}}}{F_1 \cos \varphi_1} \\ \tan \theta_i = \tan \varphi_i - \frac{G_{\text{管}} - F_{\text{浮管}}}{2F_{\text{管}} \cos \varphi_i} \end{cases}$$

发现对应各个钢管角 θ_i 之间单调递增。

由此可得海洋深度与铁桶倾角成单调递增。

(3) 海底深度对吃水深度的影响

通过对整体进行分析：

$$\begin{cases} F_{\text{拉}} \cos \varphi = F_{\text{风}} + F_{\text{水}} \\ F_{\text{拉}} \sin \varphi = F_{\text{浮}} - G_{\text{标}} \end{cases}$$

发现吃水深度与末尾钢管角 $\sin \theta$ 成单调递增，并有从钢管到锚链角的递推公式可得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \varphi_i = \tan \varphi_{i+1} - \frac{G_{\text{管}} - F_{\text{浮管}}}{F_i \cos \varphi_i} \\ \tan \varphi_{i+1} = \frac{F_i \sin \varphi_i + G_{\text{桶}} + G_{\text{球}}}{F_i \cos \varphi_i - F_{\text{水}}} \\ \tan \theta_i = \frac{G_{\text{球}} + F_i \sin \varphi_i + F_{i+1} \sin \varphi_{i+1}}{F_i \cos \varphi_i + F_{i+1} \cos \varphi_{i+1}} \\ \tan \varphi_n = \tan \varphi_{n+1} - \frac{G_{\text{环}} + G_{\text{球}}}{F_1 \cos \varphi_1} \\ \tan \theta_1 = \tan \varphi_1 - \frac{G_{\text{环}}}{2F_i \cos \theta_i} \end{array} \right.$$

各个角之间成正相关，所以可以得出吃水深度与海水深度成单调增。

附录 2：第一问求解程序

```
% 参数初值
g = 9.8; % 重力加速度
syms h % 吃水深度
% 海水
H = 18; % 水深
ru = 1025; % 海水密度
% 0. 锚
m0 = 600; % 锚的质量
G0 = m0 * g; % 锚的重量
% 1. 锚链、链环
m1 = 7; % 锚链单位长度质量
l1 = 22.05; % 锚链的长度
ln1 = 0.105; % 链环长度
G1 = m1 * ln1 * g; % 链环的重量
n1 = round(l1 / ln1); % 链环的数量
% 2. 重物球
m2 = 1200; % 重物球的质量
% m2 = 1630.88511022481;
G2 = m2 * g; % 重物球的重量
% 3. 设备、钢桶
m3 = 100; % 设备和钢桶总质量
G3 = m3 * g; % 设备和钢桶总重量
d3 = 0.3; % 钢桶的外径
l3 = 1; % 钢桶的长度
V3 = l3 * pi * d3 ^ 2 / 4; % 钢桶排水体积
Fd3 = ru * g * V3; % 设备和钢桶所受到的浮力
% 4. 钢管
m4 = 10; % 每节钢管的质量
G4 = m4 * g; % 每节钢管的重量
n4 = 4; % 钢管的节数
```

```

d4 = 0.05; % 钢管的直径
l4 = 1; % 每节钢管长度
V4 = l4 * pi * d4 ^ 2 / 4; % 每根钢管的排水体积
Fd4 = ru * g * V4; % 每根钢管所受到的浮力
% 5.浮标
m5 = 1000; % 浮标的质量
G5 = m5 * g; % 浮标的重量
d5 = 2; % 浮标底面直径
h5 = 2; % 浮标高度
V5 = h * pi * d5 ^ 2 / 4; % 浮标的排水体积
Fd5 = ru * g * V5; % 浮标所受的浮力
Vwi = 12; % 风速
Swi = (h5 - h) * d5; % 风作用面积
Fwi = 0.625 * Swi * Vwi ^ 2; % 风荷载
% 求解锚对第一个链环的拉力
Fd = Fd3 + Fd4 + Fd5; % 总浮力
G = n1 * G1 + G2 + G3 + n4 * G4 + G5; % 总重量
Fx = Fwi; % 锚对第一个链环的水平拉力
Fz = Fd - G; % 锚对第一个链环的竖直拉力
if Fz < 0 && -Fz <= n1 * G1
    nz = ceil(-Fz / G1); % 河床底部的链环数
elseif -Fz > n1 * G1 && -Fz <= n1 * G1 + G2 + G3
    nz = n1 + 1;
elseif Fz == 0
    nz = 1;
else
    nz = 0;
end
if nz ~= 0
    Fz = nz * G1 + Fz;
    fa = zeros(1, nz + 1);
    tan_fa = fa;
    tan_ct = zeros(1, nz);
else
    tan_fa = Fz / Fx; fa = atan(tan_fa); % 第一个链环与竖直方向的夹角
end
F = sqrt(Fx ^ 2 + Fz ^ 2); % 锚对第一个链环的拉力
k1 = G1 / (2 * F * cos(fa(1)));
% 求解第 i (i<n1) 个链环
if nz < n1
    for i = nz + 1 : n1 - 1
        tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + 2 * k1;
        tan_ct(i) = tan_fa(i) - k1;
    end
end
% 求解最后一个链环
if nz <= n1
    i = n1;
    tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + (G1 + G2) / (F(1) * cos(fa(1)));
    tan_ct(i) = tan_fa(i) - k1;
end
% 求解钢桶
if nz <= n1 + 1
    i = n1 + 1;
    tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + (G2 + G3 - Fd3) / (F(1) * cos(fa(1)));
    tan_ct(i) = tan_fa(i) + (G2 + G3 / 2 - Fd3 / 2) / (F(1) * cos(fa(1)));
end

```

```

% 求解钢管
for i = n1 + 2 : n1 + 1 + n4
    tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + (G4 - Fd4) / (F(1) * cos(fa(1)));
    tan_ct(i) = tan_fa(i) - (G4 - Fd4) / (2 * F(1) * cos(fa(1)));
end
fa = atan(tan_fa);
F = (F(1) * cos(fa(1)) * ones(1, i + 1)) ./ cos(fa);
ct = atan(tan_ct);
% 画图
x = 0; y = 0;
for i = 1 : n1
    x(i + 1) = sum(ln1 * cos(ct(1 : i)));
    y(i + 1) = sum(ln1 * sin(ct(1 : i)));
end
x(n1 + 2) = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1));
y(n1 + 2) = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1))) + l3 * sin(ct(n1 + 1));
for i = n1 + 2 : n1 + n4 + 1
    x(i + 1) = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * cos
(ct(n1 + 2 : i)));
    y(i + 1) = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1))) + l3 * sin(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * sin
(ct(n1 + 2 : i)));
end
plot(x(1:n1+1), y(1:n1+1), 'b')
hold on
plot(x(n1+1:n1+2), y(n1+1:n1+2), 'r')
plot(x(n1+2:n1+n4+1), y(n1+2:n1+n4+1), 'g')
H1 = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1)));
H2 = l3 * sin(ct(n1 + 1));
H3 = sum(l4 * sin(ct(n1 + 2 : n1 + 1 + n4)));
h = solve(H == H1 + H2 + H3 + h, h);
H = H1 + H2 + H3 + h
R = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * cos(ct(n1 + 2
: end)))
fx = F(end) * cos(ct(end));
fy = F(end) * sin(ct(end));
syms hh
hh = solve(fx == 0.625 * (h5 - hh) * d5 * Vwi ^ 2, hh)
er = (hh - h) / h

```

附录 3：第二问求解程序

```

% 参数初值
g = 9.8; % 重力加速度
syms h % 吃水深度
% 海水
H = 18; % 水深
ru = 1025; % 海水密度
% 0. 锚
m0 = 600; % 锚的质量
G0 = m0 * g; % 锚的重量
% 1. 锚链、链环
m1 = 7; % 锚链单位长度质量
l1 = 22.05; % 锚链的长度
ln1 = 0.105; % 链环长度
G1 = m1 * ln1 * g; % 链环的重量
n1 = round(l1 / ln1); % 链环的数量

```

```

% 2.重物球
m2 = 1200; % 重物球的质量
G2 = m2 * g; % 重物球的重量
% 3.设备、钢桶
m3 = 100; % 设备和钢桶总质量
G3 = m3 * g; % 设备和钢桶总重量
d3 = 0.3; % 钢桶的外径
l3 = 1; % 钢桶的长度
V3 = l3 * pi * d3 ^ 2 / 4; % 钢桶排水体积
Fd3 = ru * g * V3; % 设备和钢桶所受到的浮力
% 4.钢管
m4 = 10; % 每节钢管的质量
G4 = m4 * g; % 每节钢管的重量
n4 = 4; % 钢管的节数
d4 = 0.05; % 钢管的直径
l4 = 1; % 每节钢管长度
V4 = l4 * pi * d4 ^ 2 / 4; % 每根钢管的排水体积
Fd4 = ru * g * V4; % 每根钢管所受到的浮力
% 5.浮标
m5 = 1000; % 浮标的质量
G5 = m5 * g; % 浮标的重量
d5 = 2; % 浮标底面直径
h5 = 2; % 浮标高度
V5 = h * pi * d5 ^ 2 / 4; % 浮标的排水体积
Fd5 = ru * g * V5; % 浮标所受的浮力
Vwi = 36; % 风速
Swi = (h5 - h) * d5; % 风作用面积
Fwi = 0.625 * Swi * Vwi ^ 2; % 风荷载
% 求解锚对第一个链环的拉力
Fd = Fd3 + Fd4 + Fd5; % 总浮力
G = n1 * G1 + G3 + n4 * G4 + G5; % 部分总重量
Fx = Fwi; % 锚对第一个链环的水平拉力
ct = 16 * pi / 180;
tan_ct = tan(ct);
tan_fa = tan_ct + G1 / (2 * Fx);
fa = atan(tan_fa);
G2 = Fwi * tan_ct + Fd - G;
Fz = tan_fa * Fx;
F = Fx / cos(fa(1));
k1 = G1 / (2 * F * cos(fa(1)));
% 求解第 i (i<n1) 个链环
for i = 1 : n1 - 1
    tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + 2 * k1;
    tan_ct(i) = tan_fa(i) - k1;
end
% 求解最后一个链环
i = n1;
tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + (G1 + G2) / (F(1) * cos(fa(1)));
tan_ct(i) = tan_fa(i) - k1;
% 求解钢桶
i = n1 + 1;
tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + (G2 + G3 - Fd3) / (F(1) * cos(fa(1)));
tan_ct(i) = tan_fa(i) + (G2 + G3 / 2 - Fd3 / 2) / (F(1) * cos(fa(1)));
% 求解钢管
for i = n1 + 2 : n1 + 1 + n4
    tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + (G4 - Fd4) / (F(1) * cos(fa(1)));

```

```

    tan_ct(i) = tan_fa(i) - (G4 - Fd4) / (2 * F(1) * cos(fa(1)));
end
fa = atan(tan_fa);
F = (F(1) * cos(fa(1)) * ones(1, i + 1)) ./ cos(fa);
ct = atan(tan_ct);
% 画图
x = 0; y = 0;
for i = 1 : n1
    x(i + 1) = sum(ln1 * cos(ct(1 : i)));
    y(i + 1) = sum(ln1 * sin(ct(1 : i)));
end
x(n1 + 2) = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1));
y(n1 + 2) = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1))) + l3 * sin(ct(n1 + 1));
for i = n1 + 2 : n1 + n4 + 1
    x(i + 1) = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * cos
(ct(n1 + 2 : i)));
    y(i + 1) = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1))) + l3 * sin(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * sin
(ct(n1 + 2 : i)));
end
plot(x(1:n1+1), y(1:n1+1), 'b')
hold on
plot(x(n1+1:n1+2), y(n1+1:n1+2), 'r')
plot(x(n1+2:n1+n4+1), y(n1+2:n1+n4+1), 'g')
H1 = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1)));
H2 = l3 * sin(ct(n1 + 1));
H3 = sum(l4 * sin(ct(n1 + 2 : n1 + 1 + n4)));
h = solve(H == H1 + H2 + H3 + h, h);
H = H1 + H2 + H3 + h;
R = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * cos(ct(n1 + 2
: end)));
fx = F(end) * cos(ct(end));
fy = F(end) * sin(ct(end));
syms hh
hh = solve(fx == 0.625 * (h5 - hh) * d5 * Vwi ^ 2, hh);
er = (hh - h) / h;

```

附录 4: 第三问求解程序

```

clear
t1 = 0; t2 = 2;
while 1
t = 0;
for h = t1: (t2 - t1) / 99 : t2
t = t + 1;
% 参数初值
g = 9.8; % 重力加速度
%syms h % 吃水深度
% 海水
H = 16; % 水深*****
ru = 1025; % 海水密度
% 0. 锚
m0 = 600; % 锚的质量
G0 = m0 * g; % 锚的重量
% 1. 锚链、链环
xh = 4; % 锚链型号*****
m1 = [3.2 7 12.5 19.5 28.12]; % 锚链单位长度质量
m1 = m1(xh);

```

```

l1 = 28; % 锚链的长度 ***** 20 ** 22 ** 24 ** 26 ** 28 **
ln1 = [0.078 0.105 0.12 0.15 0.18]; % 链环长度
ln1 = ln1(xh);
G1 = m1 * ln1 * g; % 链环的重量
n1 = round(l1 / ln1); % 链环的数量
% 2.重物球
m2 = 2200; % 重物球的质量 ***** 1000 ** 1300 ** 1600 ** 1900 ** 2200 **
G2 = m2 * g; % 重物球的重量
% 3.设备、钢桶
m3 = 100; % 设备和钢桶总质量
G3 = m3 * g; % 设备和钢桶总重量
d3 = 0.3; % 钢桶的外径
l3 = 1; % 钢桶的长度
V3 = l3 * pi * d3 ^ 2 / 4; % 钢桶排水体积
Fd3 = ru * g * V3; % 设备和钢桶所受到的浮力
% 4.钢管
m4 = 10; % 每节钢管的质量
G4 = m4 * g; % 每节钢管的重量
n4 = 4; % 钢管的节数
d4 = 0.05; % 钢管的直径
l4 = 1; % 每节钢管长度
V4 = l4 * pi * d4 ^ 2 / 4; % 每根钢管的排水体积
Fd4 = ru * g * V4; % 每根钢管所受到的浮力
% 5.浮标
m5 = 1000; % 浮标的质量
G5 = m5 * g; % 浮标的重量
d5 = 2; % 浮标底面直径
h5 = 2; % 浮标高度
V5 = h * pi * d5 ^ 2 / 4; % 浮标的排水体积
Fd5 = ru * g * V5; % 浮标所受的浮力
Vwi = 36; % 风速
Vwa = 1.5; % 水速
Swi = (h5 - h) * d5; % 风作用面积
Swa1 = h * d5; % 水作用面积
Fwi = 0.625 * Swi * Vwi ^ 2; % 风荷载
Fwa1 = 374 * Swa1 * Vwa ^ 2; % 水流量
% 求解锚对第一个链环的拉力
Fd = Fd3 + Fd4 + Fd5; % 总浮力
G = n1 * G1 + G2 + G3 + n4 * G4 + G5; % 总重量
Fx = Fwi + Fwa1; % 锚对第一个链环的水平拉力
Fz = Fd - G; % 锚对第一个链环的竖直拉力
if Fz < 0 && -Fz <= n1 * G1
    nz = ceil(-Fz / G1); % 河床底部的链环数
elseif -Fz > n1 * G1 && -Fz <= n1 * G1 + G2 + G3
    nz = n1 + 1;
elseif Fz == 0
    nz = 1;
else
    nz = 0;
end
if nz ~= 0
    Fz = nz * G1 + Fz;
    fa = zeros(1, nz + 1);
    tan_fa = fa;
    tan_ct = zeros(1, nz);

```

```

else
    tan_fa = Fz / Fx; fa = atan(tan_fa); % 第一个链环与垂直方向的夹角
end
F(1) = sqrt(Fx ^ 2 + Fz ^ 2); % 锚对第一个链环的拉力
k1 = G1 / (2 * F(1) * cos(fa(1)));
% 求解第 i (i<n1) 个链环
if nz < n1
    for i = nz + 1 : n1 - 1
        tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + 2 * k1;
        tan_ct(i) = tan_fa(i) - k1;
    end
end
% 求解最后一个链环
if nz <= n1
    i = n1;
    tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + (G1 + G2) / (F(1) * cos(fa(1)));
    tan_ct(i) = tan_fa(i) - k1;
    fa = atan(tan_fa);
    F = (F(1) * cos(fa(1)) * ones(1, i + 1)) ./ cos(fa(1 : i + 1));
end
% 求解钢管
for i = n1 + 1 + n4 : -1 : n1 + 1
    tan_fa(i) = (Fd5 - G5 + (i - n1 - n4 - 1) * G4) / Fx;
    fa(i) = atan(tan_fa(i));
    F(i) = (Fwi - Fw1) / cos(fa(i));
    tan_ct(i) = tan_fa(i) - (G4 - Fd4) / (2 * F(1) * cos(fa(1)));
end
% 求解钢桶
if nz <= n1 + 1
    i = n1 + 1;
    tan_ct(i) = (G2 + F(i) * sin(fa(i)) + F(i + 1) * sin(fa(i + 1))) / (F(i) *
cos(fa(i)) + F(i + 1) * cos(fa(i + 1)));
    F(i + 1) = (F(i) * sin(fa(i)) + G2 + G3) / sin(fa(i + 1));
end
ct = atan(tan_ct);
Swa2 = pi * d3 ^ 2 / 4 * cos(ct(n1 + 1)) + d3 * l3 * sin(ct(n1 + 1));
Fwa2 = 374 * Swa2 * Vwa ^ 2;
H1 = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1)));
H2 = l3 * sin(ct(n1 + 1));
H3 = sum(l4 * sin(ct(n1 + 2 : n1 + 1 + n4)));
h = solve(H == H1 + H2 + H3 + h, h);
HH = H1 + H2 + H3 + h;
R = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * cos(ct(n1 + 2
: end)));
A(1, t) = h; A(2, t) = HH;
clear ct fa F tan_ct tan_fa
end
for i = 1 : size(A, 2) - 1
    if A(2, i) <= H && A(2, i + 1) >= H
        t1 = A(1, i); t2 = A(1, i + 1);
    end
end
[e, xb] = min(abs(A(2, :) - H * ones(1, size(A, 2))));
if e < 0.01
    h = A(1, xb); break;
end
clear A
end
V5 = h * pi * d5 ^ 2 / 4; % 浮标的排水体积
Fd5 = ru * g * V5; % 浮标所受的浮力

```

```

Swi = (h5 - h) * d5; % 风作用面积
Swa1 = h * d5; % 水作用面积
Fwi = 0.625 * Swi * Vwi ^ 2; % 风荷载
Fwa1 = 374 * Swa1 * Vwa ^ 2; % 水流量
% 求解锚对第一个链环的拉力
Fd = Fd3 + Fd4 + Fd5; % 总浮力
G = n1 * G1 + G2 + G3 + n4 * G4 + G5; % 总重量
Fx = Fwi + Fwa1; % 锚对第一个链环的水平拉力
Fz = Fd - G; % 锚对第一个链环的竖直拉力
if Fz < 0 && -Fz <= n1 * G1
    nz = ceil(-Fz / G1); % 河床底部的链环数
elseif -Fz > n1 * G1 && -Fz <= n1 * G1 + G2 + G3
    nz = n1 + 1;
elseif Fz == 0
    nz = 1;
else
    nz = 0;
end
if nz ~= 0
    Fz = nz * G1 + Fz;
    fa = zeros(1, nz + 1);
    tan_fa = fa;
    tan_ct = zeros(1, nz);
else
    tan_fa = Fz / Fx; fa = atan(tan_fa); % 第一个链环与竖直方向的夹角
end
F(1) = sqrt(Fx ^ 2 + Fz ^ 2); % 锚对第一个链环的拉力
k1 = G1 / (2 * F(1) * cos(fa(1)));
% 求解第 i (i<n1) 个链环
if nz < n1
    for i = nz + 1 : n1 - 1
        tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + 2 * k1;
        tan_ct(i) = tan_fa(i) - k1;
    end
end
% 求解最后一个链环
if nz <= n1
    i = n1;
    tan_fa(i + 1) = tan_fa(i) + (G1 + G2) / (F(1) * cos(fa(1)));
    tan_ct(i) = tan_fa(i) - k1;
    fa = atan(tan_fa);
    F = (F(1) * cos(fa(1)) * ones(1, i + 1)) ./ cos(fa(1 : i + 1));
end
% 求解钢管
for i = n1 + 1 + n4 : -1 : n1 + 1
    tan_fa(i) = (Fd5 - G5 + (i - n1 - n4 - 1) * G4) / Fx;
    fa(i) = atan(tan_fa(i));
    F(i) = (Fwi - Fwa1) / cos(fa(i));
    tan_ct(i) = tan_fa(i) - (G4 - Fd4) / (2 * F(1) * cos(fa(1)));
end
% 求解钢桶
if nz <= n1 + 1
    i = n1 + 1;
    tan_ct(i) = (G2 + F(i) * sin(fa(i)) + F(i + 1) * sin(fa(i + 1))) / (F(i) *
cos(fa(i)) + F(i + 1) * cos(fa(i + 1)));
    F(i + 1) = (F(i) * sin(fa(i)) + G2 + G3) / sin(fa(i + 1));
end
ct = atan(tan_ct);
Swa2 = pi * d3 ^ 2 / 4 * cos(ct(n1 + 1)) + d3 * l3 * sin(ct(n1 + 1));

```

```

Fwa2 = 374 * Swa2 * Vwa ^ 2;
% 画图
x = 0; y = 0;
for i = 1 : n1
    x(i + 1) = sum(ln1 * cos(ct(1 : i)));
    y(i + 1) = sum(ln1 * sin(ct(1 : i)));
end
x(n1 + 2) = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1));
y(n1 + 2) = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1))) + l3 * sin(ct(n1 + 1));
for i = n1 + 2 : n1 + n4 + 1
    x(i + 1) = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * cos
(ct(n1 + 2 : i)));
    y(i + 1) = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1))) + l3 * sin(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * sin
(ct(n1 + 2 : i)));
end
plot(x(1:n1+1), y(1:n1+1), 'b')
hold on
plot(x(n1+1:n1+2), y(n1+1:n1+2), 'r')
plot(x(n1+2:n1+n4+1), y(n1+2:n1+n4+1), 'g')
H1 = sum(ln1 * sin(ct(1 : n1)));
H2 = l3 * sin(ct(n1 + 1));
H3 = sum(l4 * sin(ct(n1 + 2 : n1 + 1 + n4)));
h = solve(H == H1 + H2 + H3 + h, h);
HH = H1 + H2 + H3 + h;
R = sum(ln1 * cos(ct(1 : n1))) + l3 * cos(ct(n1 + 1)) + sum(l4 * cos(ct(n1 + 2
: end)));
B = [180*ct(1)/pi 90-180*ct(end - 4)/pi h R]

```