

系泊系统的设计

摘要

针对问题一，要求计算海面风速为 $12m/s$ 和 $24m/s$ 时钢桶和钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标吃水深度和游动区域。首先采用整体隔离法，对浮标、钢管、钢桶、锚链和所参考的整体进行受力分析，以建立各变量之间的函数关系。再引入悬链线模型并根据需求对其进行合理改进，得到锚链满足的函数关系，又考虑到锚链形态受风速影响，但可主要分三种情况：拖地、临界状态及未拖地。之后，根据锚链长度及海水深度恒定，列出非线性方程组并给出模型。最后运用 *Matlab* 编程计算得到临界风速大概 $24.5m/s$ ，风速为 $12m/s$ 和 $24m/s$ 时，锚链分别处于拖地状态及近似临界状态；浮标吃水深度分别为 $0.735m$ 和 $0.750m$ ；钢桶倾斜角分别为 1.00 度和 3.82 度；锚链形状分别为 $y=3.32 \cosh(0.301(x-6.82))-3.32$ 及 $y=13.14 \cosh(0.076x-0.056)-13.16$ ；游动区域 $[13.22m, 15.22m]$ 和 $[16.82m, 18.82m]$ 。钢管的倾斜角度略小于钢桶的倾斜角度。

针对问题二，分为两个小问，第一小问类似问题一，当风力为 $36m/s$ 时，根据问题一所求的临界风速可知此时锚链未拖地，求得结果为：钢管及钢桶的倾斜角度约为 7.94 度、锚链形状 $y=29.044 \cosh(0.034x+0.319)-30.538$ 、浮标吃水深度为 $0.7701m$ ，游动区域为 $[17.7080m, 19.7080m]$ ，锚链在锚点与海床的夹角为 17.92 度，显然会发生走锚现象；第二小问即要求调节重物球使钢桶的倾斜角不超过 5 度，锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度，计算出风速为 $36m/s$ 且锚链恰好处于临界状态时，钢管与竖直方向的角度约为 1.8 度，以这个角度划分状态，先增大这个角度，不考虑锚链在锚点与海床的夹角，求解钢桶倾斜角小于 5 度时的重物球重力范围，不考虑钢桶倾斜角，求解锚链在锚点与海床的夹角小于 16 度时重物球的重力范围，两者取交集便可以求得符合条件的球重范围；再减小这个角度后利用浮标不能全部浸入海水，求得钢球重力最大值，最终得到重物球质量范围为 $[1771kg, 5226kg]$ 。

针对问题三，要求在题目给出的范围下进行系泊系统的设计，使得浮标的吃水深度及游动区域与钢桶的倾斜角度尽可能小。借鉴前两问的模型，并加以对水流速度的考虑，再通过合理假设来简化模型。在此基础上，将多目标优化转化为单目标优化，设定吃水深度、游动区域及钢桶的倾斜角度同等重要的单目标函数，再根据受力分析建立优化模型，利用逐步优化的方法来得出风速、海水速度以及区域深度对系统的影响情况。经合理分析，选取了风速、海水速度及海水深度的右边界值和密度最小的锚链，再带入同样的目标函数，达到近似系统最优状态。此时锚链选择类型 I，长为 $24.3m$ ，球重为 $25380N$ 。

关键词:整体隔离，静力平衡，悬链线，临界状态，优化模型

一、问题重述

近浅海观测网的传输节点由浮标系统、系泊系统和水声通讯系统组成(如图1所示)。某型传输节点的浮标系统可简化为底面直径 $2m$ 、高 $2m$ 的圆柱体,浮标的质量为 $1000kg$ 。系泊系统由钢管、钢桶、重物球、电焊锚链和特制的抗拖移锚组成。锚的质量为 $600kg$,锚链选用无档普通链环,近浅海观测网的常用型号及其参数在附表中列出。钢管共4节,每节长度 $1m$,直径为 $50mm$,每节钢管的质量为 $10kg$ 。要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16 度,否则锚会被拖行,致使节点移位丢失。水声通讯系统安装在一个长 $1m$ 、外径 $30cm$ 的密封圆柱形钢桶内,设备和钢桶总质量为 $100kg$ 。钢桶上接第4节钢管,下接电焊锚链。钢桶竖直时,水声通讯设备的工作效果最佳。若钢桶倾斜,则影响设备的工作效果。钢桶的倾斜角度(钢桶与竖直线的夹角)超过 5 度时,设备的工作效果较差。为了控制钢桶的倾斜角度,钢桶与电焊锚链链接处可悬挂重物球。

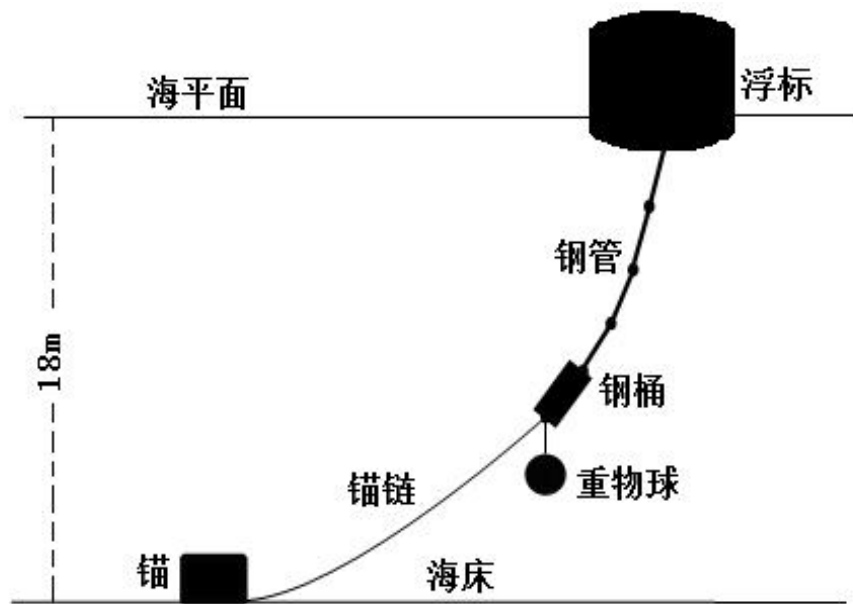


图1 传输节点示意图

系泊系统的设计问题就是确定锚链的型号、长度和重物球的质量,使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。要求解决下列问题:

问题1 某型传输节点选用II型电焊锚链 $22.05m$,选用的重物球的质量为 $1200kg$ 。现将该型传输节点布放在水深 $18m$ 、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 kg/m^3$ 的海域。若海水静止,分别计算海面风速为 $12m/s$ 和 $24m/s$ 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

问题2 在问题1的假设下,计算海面风速为 $36m/s$ 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。请调节重物球的质量,使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度,锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。

问题3 由于潮汐等因素的影响,布放海域的实测水深介于 $16m \sim 20m$ 之间。布放点的海水速度最大可达到 $1.5m/s$ 、风速最大可达到 $36m/s$ 。请给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计,分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

二、问题分析

2.1 问题一分析

问题一给出的假设条件为海水静止,要求分别计算海面风速为 $12m/s$ 和 $24m/s$ 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。首先倾斜角度定义为各部件与竖直方向的夹角,用角度制表示。选择静力平衡且受力简单的浮标作为分析的起始点,其受浮力、重力、风力及钢管的支持力,浮标受到的钢管的支持力沿着钢管的方向,再利用静力平衡的条件,可以求得第一根钢管的倾斜角度。之后将第一根钢管和浮标看做一整个系统,其受力也为重力、浮力、风力和支持力,仅大小不一致,类似的可以求得第二根钢管的倾斜角度。按照同样的方法,钢管、钢桶的倾斜角度和锚链末端切线方向的关系式均可求出,且与风力,重力,以及浮力有关。

考虑到锚链的长度较长,当风的速度很小时,锚链因受到的重力大于受到的拉力向上的分力,左端会存在一部分拖落在地,因此需要计算当锚链恰好不着地时对应的风速。查阅资料^[2],发现锚链形状满足悬链线模型,临界状态时,锚链左末端处切线水平,锚链拖地时,未拖地部分的左末端切线依然水平,锚链拖地时,左末端与竖直方向存在一个夹角,此时夹角的大小可根据锚链末端水平方向受的力与锚对其竖直方向的拉力计算得来。

无论锚链处于何种状态,锚链的长度,海水的深度恒定,且除锚外系统在竖直方向上受力平衡。因此根据这些条件可以列出非线性方程组,当锚链处于临界状态时,未知量为风力与锚链在水平方向上的投影长度,当锚链拖地时,未知量为拖地部分的长度与未拖地部分在水平方向上的投影长度;当锚链不拖地时,未知量为浮标收到的浮力和锚链在水平方向上的投影长度,解方程组即可得到运算结果。

2.2 问题二分析

问题二分为两个小问,第一小问给出风力 $36m/s$,由问题一得到的临界值可以判断此时锚链所处的状态,接着按照问题一同样的方法求出各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

第二小问要求调节重物球的重力,使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度,锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。首先知道在其他条件不变的情况下,球重与钢桶的倾斜角度及锚链左末端切线方向呈连续函数关系,容易直观得到球重越大,两角度越小,且当锚链处于拖地状态时,锚链左端与海平面的夹角恒为零。又知道锚链在锚点与海床的夹角小于 16 度时必处于未拖地状态,还需考虑钢桶的倾斜角度不超过 5 度时锚链所处的状态,因此需先计算风速为 $36m/s$ 且锚链恰好处于临界状态时,钢管与竖直方向的角度,看其与 5 度的关系,然后再以这个角度划分状态,如果小于 5 度,则求解钢管与竖直方向小于 5 度时的重物球重力范围以及锚链在锚点与海床的夹角小于 16 度时重物球的重力范围,因此两者取一个交集便可以求得符合条件的球重范围,如果大于 5 度,则必须要减小重物球的重力,求出当钢管与竖直方向小于 5 度时的重物球范围,此时锚链在锚点与海床的夹角必为 0 。又考虑到浮标不能完全浸没海水内部,因此可以得到钢球重力的一个最大值,最终可到重物球的质量范围。

2.3 问题三分析

问题三不同于前两个问题,在于锚链类型,长度和重物球的质量未知,并且要求在一定范围的自然条件(包括风速,水速,海域水深)下,选择合适的锚链类型、长度和重物球的质量,分析钢桶与钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。由于是多变量问题,需要在前两问建立的模型基础上不断优化。此问题是多目标函数,

我们假定各个目标的重要程度相同，以其范围倒数作为各个变量的权重进行标准化，以此设立单目标函数，根据相关物理分析得到优化模型。假设在风速、水速、海域水深一定的情况下，通过函数式研究变量之间的相互关系，最终发现锚链的水平长度和浮标的吃水深度可以决定锚链类型、长度和重物球的质量的选择，当风速、水速及海域深度在一定范围内变化时，通过穷举法将不同自然条件下的设计方案列出，排除不能处于正常工作状态的方案。最后分析以上方案在临界情况下钢桶与钢管的倾斜角度、锚链形状及浮标的吃水深度与游动区域。

三、问题假设

- 1、假设海风方向与海平面平行，且方向一定。
- 2、假设对于题中的海风速度，锚处于静止状态。
- 3、系泊系统中的锚链近似看作质地均匀且有质量的软绳。
- 4、假设重物球及锚其受到的浮力较重力而言小到可以忽略不计。
- 5、假设浮标在海面上处于竖直状态，不倾斜，即上下断面与海面大致保持平行。
- 6、问题三中忽略海面以下海水对锚链，钢桶等物体的作用力。

四、符号说明

$f_{\text{标}}$	浮标受到的浮力
$f_{\text{管}}$	钢管受到的浮力
$f_{\text{桶}}$	钢桶受到的浮力
$G_{\text{标}}$	浮标所受到的重力
$G_{\text{管}}$	钢管所受到的重力
$G_{\text{桶}}$	钢桶所受到的重力
$G_{\text{球}}$	重力球所受到的重力
$G_{\text{链}}$	锚链所受到的重力
$f_{\text{风}}$	风力，近海风荷载
θ_i	第 i 根钢管与竖直方向的夹角。其中， $i=1, 2, 3, 4$
θ_5	钢桶与竖直方向的夹角
θ_6	锚链右末端切线与竖直方向的夹角
T_i	浮标与前 $i-1$ 根钢管组成的整体受到的第 i 根钢管的拉力，其中 $i=1, 2, 3, 4$
T_5	浮标与前四根钢管组成的整体受到的钢桶的拉力
T_6	浮标、四根钢管及钢桶受到的锚链右末端的拉力
s	锚链拉直时的长度
H	海水深度
R	浮标截面半径
ρ_w	海水的密度
$f_{\text{拉}}$	锚对锚链的拉力在竖直方向上的分力
σ	锚链的线密度，即单位长度上的质量

五、模型建立与求解

5.2 问题一模型

系泊系统示意图虽结构简单，但是内部受力情况多样复杂，为了能够找到计算的突破口，拟寻找受力简单且直接的参考系切入运算，这里，参照物理意义上‘向上为正，向下为负’的原则^[1]进行力的分析，再利用整体隔离法进行下一步的推算。以下先给出建立模型必要的准备阶段。

5.2.1 模型准备

Step1. 基本相关力的定义式

这些公式同样适用于后几个问题：

1) 重力:重力的计算公式采用质量和重力加速度的乘积的形式，此处我们取重力加速度 $g=9.8m/s$ ，计算公式如下：

$$G = mg \quad (1)$$

其中 m 是物体的质量 (kg)。

2) 风力:近海风荷载可通过近似公式计算：

$$F = 0.625Sv^2 \quad (2)$$

其中 S 为物体在风向法平面的投影面积 (m^2)， v 为风速 (m/s)，假设风的方向平行于海平面，因此法方向是竖直的， S 就为圆柱的横截面积即正方形。

3) 水流力:近海水流力可通过近似公式计算：

$$F = 374Sv^2 \quad (3)$$

其中 S 为物体在水流速度法平面的投影面积 (m^2)， v 为水流速度 (m/s)。

4) 浮力:浮力与介质的密度，物体排开液体的体积以及重力加速度呈正比例关系，给出计算公式如下：

$$F = \rho_w g V \quad (4)$$

其中 ρ_w 为介质的密度 (kg/m^3)， g 为重力加速度 (m/s)， V 为物体排开液体的体积 (m^3)。对于质地均匀的圆柱体来说，浮力的计算公式为：

$$F = R^2 \pi H \rho_w g \quad (5)$$

其中 R 为圆柱体半径 (m)， H 为圆柱浸在液体中的长度 (m)。

Step2. 浮标、钢管与钢桶受力分析

以第二根钢管为例，采用整体隔离法，将第一根钢管与浮标看成一个整体，如图 2。对这个整体进行受力分析，如图 3，可以求得第二根钢管对参考整体的拉力。利用作用力与反作用的性质，得到参考整体所受到的第二根钢管的拉力。当钢管两端拉力方向与竖直方向的夹角较小时，近似认为第二根钢管的方向与第一根钢管对其的拉力方向一致，以下均假设钢管或钢桶的倾斜方向和其对相邻参考系统的拉力方向相同。

为了能够进行整体性的分析，我们将此系统近似成一个质量集中、密度均匀的球体，如图 3，并对这个球体进行受力分析。

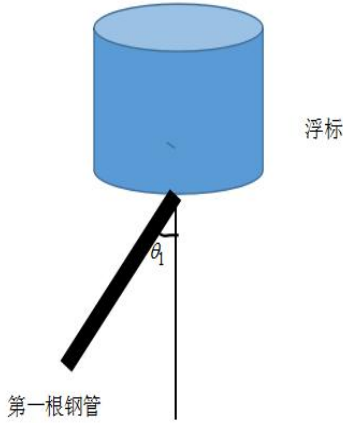


图 2 第一根钢管及浮标系统

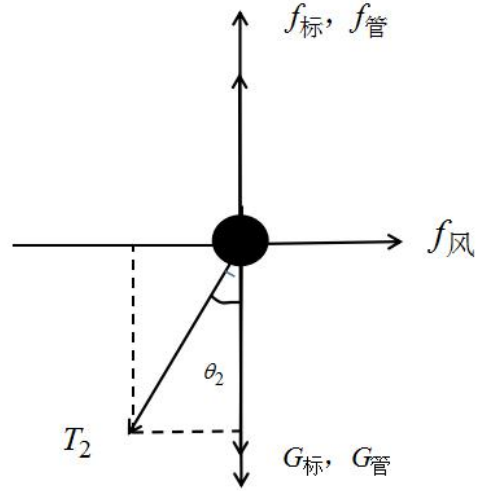


图 3 第一根钢管和浮标系统的受力分析

系统受到六个力后达到一个静力平衡的状态，分别是：浮标竖直向下的重力 $G_{\text{标}}$ ；第一根钢管竖直向下的重力 $G_{\text{管}}$ ；海水对浮标浸入部分竖直向上的浮力 $f_{\text{标}}$ ；海水对第一根钢管竖直向上的浮力 $f_{\text{管}}$ ；整个系统受到平行于海平面的近海风荷载 $f_{\text{风}}$ ；第二根钢管对其斜向下的拉力 T_2 ，方向等于第二根钢管的方向，夹角为 θ_2 。

根据受力平衡，在水平方向和竖直方向上有：

$$\begin{cases} T_2 \sin(\theta_2) = f_{\text{风}} \\ T_2 \cos(\theta_2) + G_{\text{标}} + G_{\text{管}} = f_{\text{标}} + f_{\text{管}} \end{cases} \quad (6)$$

求得第一根钢管对其斜向下的拉力及夹角为：

$$\begin{cases} T_2 = \sqrt{(f_{\text{风}})^2 + (f_{\text{标}} + f_{\text{管}} - G_{\text{标}} - G_{\text{管}})^2} \\ \theta_2 = \arctan\left(\frac{f_{\text{风}}}{f_{\text{标}} + f_{\text{管}} - G_{\text{标}} - G_{\text{管}}}\right) \end{cases} \quad (7)$$

类似地我们给出计算夹角的一般式。拟将前 i ($i=0, 1, 2, 3, 4$) 根钢管以及浮标看做一个系统，也就是一个整体，其受重力、浮力、风力拉力，当 $i=0, 1, 2, 3$ 时拉力的方向沿着第 $i+1$ 根钢管的倾斜方向，当 $i=4$ 时，拉力的方向沿着钢桶的倾斜方向。

基于上述理论，并考虑到公式的简洁性，很容易的就可以给出如下一般式：

$$\begin{cases} T_i = \sqrt{(f_{\text{风}})^2 + [f_{\text{标}} + (i-1)f_{\text{管}} - G_{\text{标}} - (i-1)G_{\text{管}}]^2} \\ \theta_i = \arctan\left(\frac{f_{\text{风}}}{f_{\text{标}} + (i-1)f_{\text{管}} - G_{\text{标}} - (i-1)G_{\text{管}}}\right) \end{cases} \quad (8)$$

其中， $i=1, 2, 3, 4, 5$ ， T_i 为前 $(i-1)$ 根钢管与浮标组成的系统受到的第 i 根钢管 ($i=1, 2, 3, 4$ 时) 或钢桶 ($i=5$ 时) 对其拉力， θ_i 为第 i 根钢管与竖直方向的夹角 ($i=1, 2, 3, 4$)， θ_5 为钢桶与竖直方向的夹角。

Step3 锚链形状及受力分析

系泊系统中的锚链近似看作质地均匀且有质量的软绳，在不同的点，其切线与竖直方向的夹角度不同的。可以猜测，锚链形状必满足某种关系式，对此关系式进行求导，便可以得到锚链每点的切线方向，于是分析锚链右末端的切线方向便有了意义，因此，我们将浮标、钢管及钢桶看做一个整体，对锚链右末端的点进行受力分析，便可以求得锚链右末端的切线与竖直方向的夹角，受力分析如图 4:

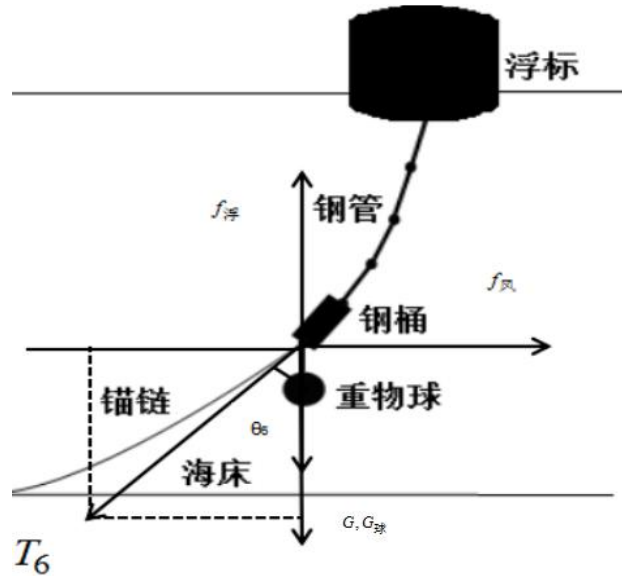


图 4 锚链右末端受力分析

这里说明，锚链末端部分挂着重物球其体积无法求出，但是猜测重物球密度较高，相对于很大的重力来说，可以简单忽略所受浮力。通过受力平衡求得拉力和夹角为：

$$\begin{cases} T_6 = \sqrt{f_{风}^2 + F^2} \\ \theta_6 = \arctan\left(\frac{f_{风}}{F}\right) \end{cases} \quad (9)$$

其中， $F = f_{标} + 4f_{管} + f_{桶} - G_{标} - 4G_{管} - G_{桶} - G_{球}$ ， $f_{桶}$ 为钢桶受到的浮力， $G_{桶}$ 为钢桶受到的重力， $G_{球}$ 为重物球受到的重力， θ_6 为锚链右末端切线方向与竖直方向的夹角。

Step4 悬链线的引入

为求得锚链的形状，即其函数关系式，我们查阅相关资料，引入悬链线曲线^[2]。悬链线是一种曲线，它的形状与悬在两端的绳子因均匀引力作用下掉下来之形相似，选择适当的坐标系后，悬链线的方程是一个双曲余弦函数。由于锚链两端也是固定，无运动趋势，且两端受到锚和钢桶的力，受重力和浮力作用自然下落，因此符合悬链线曲线方程。首先给出悬链线的理想示意图^[3]：

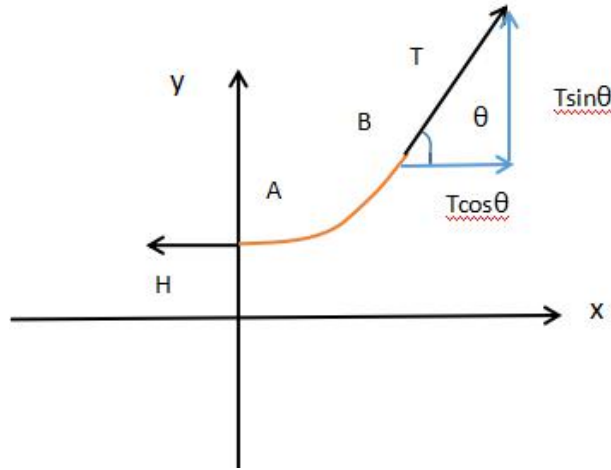


图 5 悬链线曲线理想示意图

先对其进行公式验算和推导，以求出函数关系式^[3]：

其中，最低点处受水平向左的拉力 H ，右悬挂点处受一个斜向上的拉力 T ，设 T 和水平方向夹角为 θ ，由于 B 点受力平衡得到：

$$\begin{cases} T \sin \theta = s \sigma g \\ T \cos \theta = H \end{cases} \quad (10)$$

其中， s 为 AB 段绳子的长度， σ 为绳子线密度 (kg/m)，即单位长度的质量，解得：

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{s \sigma g}{H} \quad (11)$$

利用弧长公式得到

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx = \int \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (12)$$

把 s 带入微分方程 (11) 式，再做一变量替换，令 $p = dy/dx$ ，得到如下方程：

$$p = \frac{\sigma g}{H} \int \sqrt{1 + p^2} dx \quad (13)$$

上式两边对 x 求导，再变量分离对两端进行积分，得到：

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int \frac{\sigma g}{H} dx \quad (14)$$

由于

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (15)$$

所以上面的积分的解为：

$$\sinh^{-1}(p) = \frac{\sigma g}{H} x + C_1 \quad (16)$$

下面确定 C_1 的值:显然,当 $x=0$ 时, $y'=0$, 即 $p=0$, 所以将该初值条件带入式 (16), 又 $\sinh^{-1}(0)=0$, 解得 $C_1=0$ 。然后利用反函数的性质, 在 (16) 式两端取双曲正弦, 得到最终解为:

$$y = \frac{H}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{H} x\right) + C \quad (17)$$

上式中的 C 一般保留, 它会随着坐标系选择的不同而取不同的值。

5.1.2 模型建立

锚链的状态受海风影响, 不同的风速使得锚链处于拖地、不拖地以及临界这三种状态, 以下我们对这三种状态进行分析。

1) 锚链刚好不拖地 (临界状态)

处于临界状态时, 锚链不拖地且左末端处的切线水平。我们取锚链左末端处为原点, 向右为 x 轴正方向, 向上为 y 轴正方向, 建立直角坐标系, 如图:

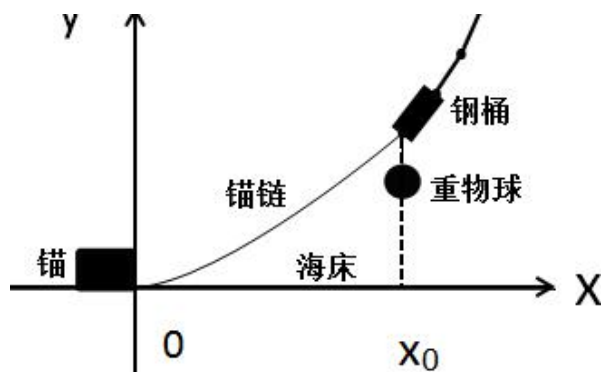


图 6 锚链曲线在坐标中的示意图

其中, 锚链右末端对应的 x 轴的坐标为 x_0 , 显然当 $x=0$ 时, $\frac{dy}{dx}=0$ 且 $y=0$ 。这完全符合悬链线曲线的模型, 带入式 (17) 并利用常微分方程的初值问题, 得到锚链形状函数关系式:

$$y = \frac{f_{\text{风}}}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}}} x\right) - \frac{f_{\text{风}}}{\sigma g} \quad (18)$$

其中, σ 为绳子线密度, 求导得到切线关系式为:

$$y' = \sinh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}}} x\right) \quad (19)$$

2) 风速小于临界风速

当风速小于临界风速时, 锚链左端将会有一部分托在地上, 拖地部分平行于海床, 假设拖地部分是一条直线, 以锚链刚好离开地面的部分为坐标原点, x 轴与 y 轴定义同上, 示意图如下^[4]:

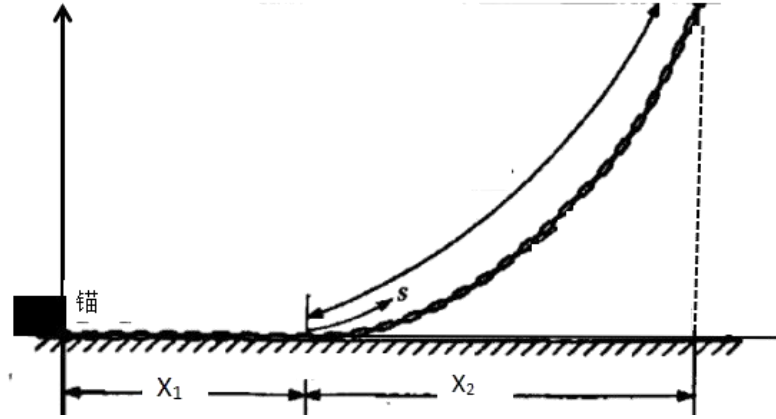


图 7 锚链拖地示意图

图中 x_1 段是拖地的锚链拖地长度， x_2 是锚链未拖地部分在水平方向上的投影长度，将，将为拖地的锚链、钢桶、钢管和浮标看成一个系统，其恰好刚离地，因此 $(x_1, 0)$ 点处的切线方向平行于 x 轴，因此右系统不受左系统的竖直方向的拉力，否则一定有一竖直分力使得切线不平行与 x 轴，左系统对右系统的力仅限于水平方向，因此在竖直方向上，参考系统受力平衡。

假设锚链拖地部分是一条直线且拖地部分完全拉伸，同样地，右端拉起的部分函数表达式和临界状态一致，可以看做临界状态向右平移了 x_1 的长度，由此，我们得到分段函数的形式：

$$y = \begin{cases} \frac{f_{\text{风}}}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}}} x\right) - \frac{f_{\text{风}}}{\sigma g} & (x_1 \leq x < x_1 + x_2) \\ 0 & (0 < x < x_1) \end{cases} \quad (20)$$

对 (20) 式求导，得到分段切线方程：

$$y' = \begin{cases} \sinh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}}} x\right) & (x_1 \leq x < x_1 + x_2) \\ 0 & (0 < x < x_1) \end{cases} \quad (21)$$

3) 锚链不拖地

由于风力加大，钢管和钢桶更加倾斜，便可将锚链整个拉离海床，由于此时锚对锚链有末端会产生向下的一个分力，因此锚链左末端处切线方向不水平。借助悬链线方程推导过程的已得到的式子 (11)，有：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s\sigma g + f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}}} \quad (22)$$

同悬链线的求解方式，得到：

$$\sinh^{-1}(p) = \frac{\sigma g}{f_{\text{风}}} x + C_1 \quad (23)$$

其中 $f_{\text{拉}}$ 为除锚外的系统受到的锚对其拉力在竖直方向上的分力。利用常微分方程的初值问题，当 $x=0$ 时， $p = \frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}}}$ 且 $y=0$ ，可分别求得 $C_1 = \sinh^{-1}\left(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}}}\right)$ ，

$C = -\frac{f_{\text{风}}}{\sigma g} \cosh(\sinh^{-1}(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}}}))$ ，于是我们得到的原点处切线不水平时的悬链线关系式为：

$$y = \frac{f_{\text{风}}}{\sigma g} \cosh(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}}} x + \sinh^{-1}(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}}})) - \frac{f_{\text{风}}}{\sigma g} \cosh(\sinh^{-1}(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}}})) \quad (24)$$

求导得到导数关系式：

$$y' = \sinh(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}}} x + \sinh^{-1}(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}}})) \quad (25)$$

综上所述，我们给出锚链三种状态均满足的条件，根据除锚以外的系统在竖直方向上受力平衡，我们给出以下恒成立的公式：

$$f_{\text{标}} + 4f_{\text{管}} + f_{\text{桶}} = G_{\text{标}} + 4G_{\text{管}} + G_{\text{桶}} + G_{\text{球}} + f_{\text{拉}} + (s - x_1)\sigma g \quad (26)$$

其中， s 是锚链长度， x_1 是锚链拖地的长度。假设浮标受风的影响倾斜程度忽略不计，即假设横断面与海平面平行，根据浮力计算公式，得到海水的吃水深度为：

$$h = \frac{f_{\text{标}}}{\pi R^2 \rho_{\omega} g} \quad (27)$$

其中， R 为浮标半径， ρ_{ω} 为海水密度。不考虑浸入海水的部件受风力的影响，并且根据近海风荷载近似公式（2）得到：

$$f_{\text{风}} = 0.625 l_{\text{标}} (l_{\text{标}} - h) v_{\text{风}}^2 \quad (28)$$

其中 $l_{\text{标}}$ 为浮标的长度， $v_{\text{风}}$ 是风速。

根据锚链长度已知的条件，运用弧长的曲线积分得到：

$$x_1 + \int_{x_1}^{x_1+x_2} \sqrt{1+y'^2} = s \quad (29)$$

其中， x_2 为锚链未拖地部分在水平方向上的投影。

又海水深度已知，将各个部件在竖直方向的投影简单叠加可以得到：

$$y(x_1 + x_2) + l_{\text{管}} \sum_{i=1}^4 \cos(\theta_i) + l_{\text{桶}} \cos(\theta_5) + h = H \quad (30)$$

其中 $l_{\text{管}}$ 为钢管的长度， $l_{\text{桶}}$ 为钢桶的长度， H 为海水深度， h 为浮标的吃水深度。

由于浮标的直径为 $2m$ ，因此游动范围是长度为 $2m$ 的区间，其区间的中点在 x 轴上的坐标即为各部件在水平方向上投影和，则游动范围是：

$$l_{\text{范}} = l_{\text{管}} \sum_{i=1}^4 \sin(\theta_i) + l_{\text{桶}} \sin(\theta_5) + x_1 + x_2 \pm R \quad (31)$$

5.1.4 模型求解

将所需数据均换算成国际单位，根据题目给出的条件及模型中推导出的公式，给出以下数据表：

表 1 问题一基本数据值

浮标重力 $G_{\text{标}}$	9800.00N	钢管浮力 $f_{\text{管}}$	19.72N
---------------------	----------	---------------------	--------

钢管重力 $G_{管}$	98.00N	钢桶浮力 $f_{桶}$	709.68N
钢桶重力 $G_{桶}$	980.00N	浮标长度 $l_{标}$	2.00m
重物球重力 $G_{球}$	11760.00N	钢管长度 $l_{管}$	1.00m
浮标半径 R	1.00m	钢桶长度 $l_{桶}$	1.00m
海水深度 H	18.00m	锚链长度 s	22.05m
锚链的线密度 σ	7.00kg/m	海水密度 ρ_w	1025kg/m ³

临界状态时，锚链刚好全部被拖起，此时原点处函数的切线水平，所以在竖直方向上不受锚的力，因此， $f_{拉} = 0$ ，且拖地长度 $x_1 = 0$ ；当锚链拖地时，为拖地部分类似于临界状态，相当于函数向右平移了 x_1 个单位，同样的 $f_{拉} = 0$ ；当锚链未拖地时，拖地长度 $x_1 = 0$ ，但由于原点处切线方向与 x 轴存在夹角，故锚对锚链在竖直方向上的拉力 $f_{拉} > 0$ 。

将式子 (29) (30) 联立得到方程组：

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_1+x_2} \sqrt{1+y'^2} = s - x_1 \\ y(x_1+x_2) + l_{管} \sum_{i=1}^4 \cos(\theta_i) + l_{桶} \cos(\theta_5) + h = H \end{cases} \quad (32)$$

根据不同的状态，分别将 (26) (27) (28) (30) 及相应的锚链关系式与导数关系式带入方程组 (32)。对于临界状态，未知参数为风力 $f_{风}$ 与锚链在水平方向上的投影长度 x_2 ；当锚链拖地时，未知参数为拖地长度 x_1 和锚链未拖地部分在水平方向上的投影长度 x_2 ；当锚链不拖地时，未知参数为浮标收到的浮力 $f_{标}$ 和锚链在水平方向上的投影长度 x_2 。解非线性方程组求得**临界风速大约为 24.52m/s**，故当风速为 12m/s 时，锚链左端部分拖地，长度为 6.82 米，当风速为 24m/s 时，近似处于临界状态。运用 *Matlab* 编程计算(源程序见附录)给出结果的近似值，如下表：

表 2 海风速度为 12m/s 和 24m/s 时各参数的计算结果

海风速度	12m/s	24m/s
钢桶倾斜角度 (度)	0.9979	3.8224
第一根钢管倾斜角度 (度)	0.9746	3.7360
第二根钢管倾斜角度 (度)	0.9803	3.7572
第三根钢管倾斜角度 (度)	0.9860	3.7787
第四根钢管倾斜角度 (度)	0.9920	3.8005
锚链形状	$y=3.32cosh(0.301(x-6.82))-3.32$	$y=13.14cosh(0.076x-0.056)-13.16$
吃水深度	0.7348	0.7496
游动范围	[13.217,15.217]	[16.823, 18.823]

从结果中可以看出，钢桶的倾斜角均为小于 5 度，因此设备的工作效果均良好，

在所求的 5 个角度中，倾斜角度最小的是第一根钢管与竖直方向的夹角，最大的是钢桶与竖直方向的夹角。锚链形状是以锚链左末端其为坐标原点，水平和竖直方向分别为 x 轴和 y 轴的坐标系下的函数，我们绘制出图像如下：

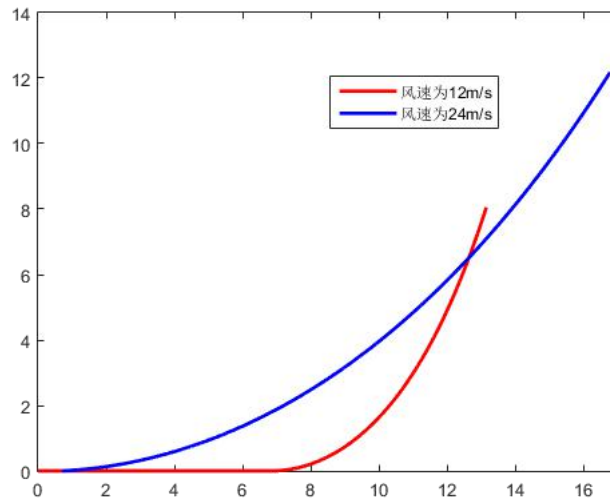


图 8 锚链形状理想示意图

图中两条曲线的长度相同，状态不一。综上所述，计算结果与实际吻合度较高，虽存在一定误差，但是相对比较合理。

5.2 问题二模型

问题二分为两小问，对于第一小问，将风力增大为 36m/s ，大于临界海风速度，因此锚链不会拖地，此时，拖地长度 $x_1 = 0$ ，但由于原点处切线方向与 x 轴存在夹角，故锚对锚链在竖直方向下的拉力 $f_{\text{拉}} > 0$ 。根据问题一的分析，用同样的方法进行计算，结果为：

表 3 海风速度为 36m/s 时各参数的计算结果

海风速度 m/s	36
钢桶倾斜角度（度）	7.9926
第一根钢管倾斜角度（度）	7.8222
第二根钢管倾斜角度（度）	7.8641
第三根钢管倾斜角度（度）	7.9065
第四根钢管倾斜角度（度）	7.9493
锚链形状	$y=29.044\cosh(0.034x+0.319)-30.538$
吃水深度（米）	0.7701
游动范围	[17.7080,19.7080]
锚链左端与海平面的夹角（度）	17.9189

从表中，可以发现钢桶的倾斜角度接近 8 度，大于 5 度，因此会使得系统工作效果差，且锚链左端与海平面的夹角约为 18 度，大于 16 度，会发生走锚现象。若想改善此种状况，必须合理调节重物球的重力。类似于问题一，绘制出如下曲线图像：

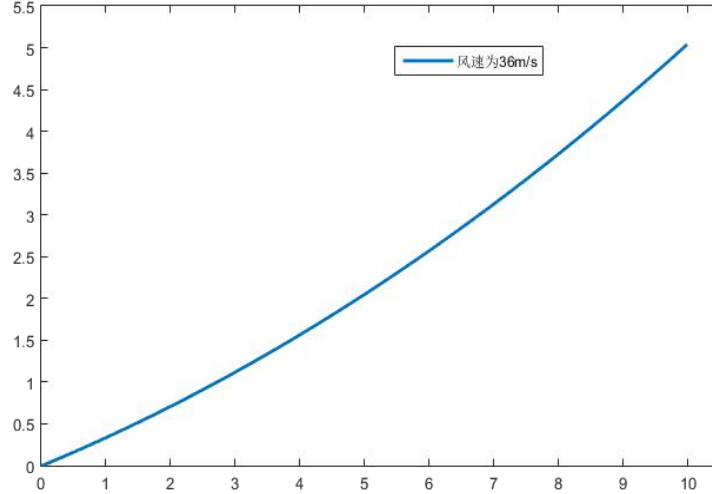


图 9 锚链形状示意图

第二小问，突破口为计算风速为 36m/s 且锚链恰好处于临界状态时，钢管与竖直方向的角度，看其与 5 度的关系，然后再以这个角度划分状态。求解钢管与竖直方向小于 5 度时的重物球重力范围以及锚链在锚点与海床的夹角小于 16 度时重物球的重力范围，两者取一个交集便可以求得符合条件的球重范围。

Step1 锚链处于临界状态

竖直方向上不受锚链的力，此时原点处函数的切线水平，因此， $f_{\text{拉}} = 0$ 且拖地长度 $x_1 = 0$ 。由第一问题临界状态的分析可得，锚链的函数及导函数关系式为：

$$\begin{cases} y = \frac{f_{\text{风}}}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}}} x\right) - \frac{f_{\text{风}}}{\sigma g} \\ y' = \sinh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}}} x\right) \end{cases} \quad (33)$$

由问题一的 (26) 式得到浮标的浮力为：

$$f_{\text{标}} = G_{\text{标}} + 4G_{\text{管}} + G_{\text{桶}} + G_{\text{球}} + G_{\text{链}} - 4f_{\text{管}} - f_{\text{桶}} \quad (34)$$

由问题一的 (32) 式得到针对临界状态的方程组为：

$$\begin{cases} \int_0^{x_2} \sqrt{1+y'^2} = s \\ y(x_2) + l_{\text{管}} \sum_{i=1}^4 \cos(\theta_i) + l_{\text{桶}} \cos(\theta_5) + h = H \end{cases} \quad (35)$$

根据问题一的 (27) (28) 得到相应的吃水深度和海面风载荷，将其带入上面的方程组。其中未知参数为钢球的重力 $G_{\text{球}}$ 以及锚链在水平方向上的投影长度 x_2 ，求解二元非线性方程组得到 $G_{\text{球}} = 31088\text{N}$ 。

将其带入式 (8) (令 $i=5$)，我们可以得到临界状态时钢桶的倾斜角度 $\theta = 1.82$ 度，可以发现其在 0 到 5 度范围内，则当球重大于 31088N 时，度数小于 1.82 度，锚链处于拖地状态。

Step2 钢桶的倾斜角度小于 5 度

由 Step1 可知此时锚链处于未拖地的状态， $f_{拉} > 0$ ，且拖地长度 $x_1 = 0$ 。由第一问题未拖地状态的分析可得，锚链的函数及导函数关系式为：

$$\begin{cases} y = \frac{f_{风}}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{f_{风}} x + \sinh^{-1}\left(\frac{f_{拉}}{f_{风}}\right)\right) - \frac{f_{风}}{\sigma g} \cosh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{f_{拉}}{f_{风}}\right)\right) \\ y' = \sinh\left(\frac{\sigma g}{f_{风}} x + \sinh^{-1}\left(\frac{f_{拉}}{f_{风}}\right)\right) \end{cases} \quad (36)$$

由受力分析联立 (8) (27) (28) 得到：

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{f_{风}}{f_{标} + 4f_{桶} - G_{标} - 4G_{桶}} \\ h = \frac{f_{标}}{\pi R^2 \rho_{\omega} g} \\ f_{风} = 0.625 l_{标} (l_{标} - h) v^2 \end{cases} \quad (37)$$

已知风速 v 和 θ ，便可以求得吃水深度 h 以及浮标的浮力 $f_{标}$ 。由问题一的 (32) 式，得到针对未拖地状态的方程组为：

$$\begin{cases} \int_0^{x_2} \sqrt{1+y'^2} = s \\ y(x_2) + l_{管} \sum_{i=1}^4 \cos(\theta_i) + l_{桶} \cos(\theta_5) + h = H \end{cases} \quad (38)$$

将相关数据带入上面的方程组，其中未知量为钢球的重力 $G_{球}$ 以及锚链在水平方向上的投影长度 x_2 。求解二元非线性方程组得到 $G_{球} = 14962\text{N}$ ，即 $G_{球} > 14962\text{N}$ 时钢桶的倾斜角度小于 5 度。

Step3 锚链左端与海平面的夹角为 16 度

当锚链左端与海平面的夹角为 16 度，链锚必然处于未拖地状态，同样可以借鉴 Step2 的求解方式，其中未知量为钢球的重力 $G_{球}$ 以及锚链在水平方向上的投影长度 x_2 。求解二元非线性方程组得到 $G_{球} = 17359\text{N}$ ，即 $G_{球} > 17359\text{N}$ 时锚链左端与海平面的夹角为 16 度。

综上所述，只有当锚链左端与海平面的夹角小于 16 度，且钢桶倾斜角度小于 5 度时，系统效果比较理想，因此取两个交集得到 $G_{球} > 17359\text{N}$ ，而到小球的重力达到一定值是浮标会完全沉没，这是不符合设计要求的，从这个条件中我们可以近似求得 $G_{球} < 51218\text{N}$ 。至此我们得到钢球质量的合理范围为 $[1771\text{kg}, 5226\text{kg}]$ 。

5.3 问题三模型

通过选择锚链型号，长度，重物球质量，使得浮标吃水深度，游动区域，钢桶倾角尽量小。为了简化模型，我们忽略水下水流力对锚链，钢桶，钢管的作用力，仅考虑水

面浮标所受的水流力，假设锚链始终处于未拖地状态。

竖直方向距离之和等于水深：

$$y(x_0) + l_{\text{管}} \sum_{i=1}^4 \cos \theta_i + l_{\text{桶}} \cos \theta_5 + h = H \quad (39)$$

水平方向距离之和等于游动最大半径：

$$L = x_2 + l_{\text{管}} \sum_{i=1}^4 \sin \theta_i + l_{\text{桶}} \sin \theta_5 \pm R \quad (40)$$

系统在竖直方向上受力平衡可得锚对锚链向下的拉力：

$$f_{\text{拉}} = (f_{\text{浮}} - G_{\text{标}}) + (f_{\text{桶}} - G_{\text{桶}}) - 4(G_{\text{管}} - f_{\text{管}}) - G_{\text{球}} - G_{\text{链}} \quad (41)$$

由未拖地状态的锚链函数及导函数关系式得到：

$$\begin{cases} y = \frac{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}} x + \sinh^{-1}\left(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}\right)\right) - \frac{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}{\sigma g} \cosh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}\right)\right) \\ y' = \sinh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}} x + \sinh^{-1}\left(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}\right)\right) \end{cases} \quad (42)$$

根据锚链长度已知的条件，运用弧长的曲线积分，得到：

$$\int_0^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} = s \quad (43)$$

由浮力公式可以得到其中吃水深度：

$$h = \frac{f_{\text{标}}}{\pi R^2 \rho g} \quad (44)$$

锚链重力为：

$$G_{\text{链}} = s \sigma_k g \quad (45)$$

其中 k 表示锚链的种类， S 为锚链的长度。

题目所加的限制条件水速 $0 \leq v_{\text{水}} \leq 1.5 \text{ m/s}$ ，风速 $0 \leq v_{\text{风}} \leq 36 \text{ m/s}$ ，锚链左端与海平面的夹角 $0^\circ \leq \theta_6 \leq 16^\circ$ ，海水深度为 $16 \text{ m} \leq H \leq 20 \text{ m}$ ，钢桶倾斜角 $0^\circ \leq \theta_5 \leq 5^\circ$ ，吃水深度 $0 \leq h \leq 2 \text{ m}$ ，假设锚链长度 $0 \leq l_{\text{链}} \leq 30 \text{ m}$ 。

本题为多目标求解，通过确定锚链的型号、长度和重物球的质量，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小，我们需要转化为单目标求解。假设这三个目标变量的重要程度相同。这几个目标变量的单位及数量级不同，可以以其范围倒数作为各个变量的权重来进行标准化。至此我们建立优化模型如下：

$$\min \quad w = \frac{\theta_5}{5} + \frac{h}{2} + \frac{L}{30} \quad (46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
y(x_0) + l_{\text{管}} \sum_{i=1}^4 \cos \theta_i + l_{\text{桶}} \cos \theta_5 + h = H \\
L = x_2 + l_{\text{管}} \sum_{i=1}^4 \sin \theta_i + l_{\text{桶}} \sin \theta_5 \pm R \\
f_{\text{拉}} = (f_{\text{浮}} - G_{\text{标}}) + (f_{\text{桶}} - G_{\text{桶}}) - 4(G_{\text{管}} - f_{\text{管}}) - G_{\text{球}} - G_{\text{链}} \\
y = \frac{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}} x + \sinh^{-1}\left(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}\right)\right) - \frac{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}{\sigma g} \cosh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}\right)\right) \\
y' = \sinh\left(\frac{\sigma g}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}} x + \sinh^{-1}\left(\frac{f_{\text{拉}}}{f_{\text{风}} + f_{\text{水}}}\right)\right) \\
\int_0^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} = s \\
h = \frac{f_{\text{标}}}{\pi R^2 \rho g}, f_{\text{水}} = 374 l_{\text{标}} h v_{\text{水}}^2, f_{\text{风}} = 0.625 l_{\text{标}} (l_{\text{标}} - h) v_{\text{风}}^2 \\
G_{\text{链}} = s \sigma_k g \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5) \\
0 \leq v_{\text{水}} \leq 1.5 \text{ m/s}, 0 \leq v_{\text{风}} \leq 36 \text{ m/s}, 0^\circ \leq \theta_6 \leq 16^\circ, 16 \text{ m} \leq H \leq 20 \text{ m}
\end{array} \right. \quad (47)$$

上述模型能够设计较好的系泊系统，但是实现起来却较困难。因此我们考虑逐步优化的方式来进行设计求解过程。

1. 为了使得浮标的吃水深度尽可能小，这要求钢球的重力也要尽可能小。
2. 当其他条件不变的情况下，风速或者海水速度越大，钢桶的倾斜角度以及链锚右端的切线角度越大。为了使得系统处于正常工作条件必须调节钢球重力，使得求解满足钢桶的倾斜斜角度小于 5 度，锚链左端与海平面的夹角小于 16 度。
3. 我们设计的系统能够满足水深 $l_{\text{水}}$ 介于 $16\text{m} \sim 20\text{m}$ ，海水速度 $v_{\text{水}} \leq 1.5\text{m/s}$ ，风速 $v_{\text{风}} \leq 36\text{m/s}$ 这些条件范围内。为了使得满足以上范围条件，我们只需考虑其每个右边界条件，我们可以求出在边界条件下钢球的最小重力，这也是使系统满足设计要求的钢球最小重力。
4. 在其他条件不变的情况下，容易分析得到锚链越长，其浮动的距离越长。为了使得浮标的浮动距离尽可能小，这要求锚链长度也要尽可能小。
5. 在其他条件不变的情况下，锚链的密度越大，锚链的重力也越大。由于竖直方向上受力平衡，浮标受到的浮力越大，吃水深度也越大。

综上所述，我们选取水深 $l_{\text{水}} = 20\text{m}$ ，海水速度 $v_{\text{水}} = 1.5\text{m/s}$ ，风速 $v_{\text{风}} = 36\text{m/s}$ ，锚链类型为 I，建立同样的目标函数：

$$\min \alpha(s, G_{\text{球}}) = \frac{\theta_5}{5} + \frac{h}{2} + \frac{L}{30} \quad (48)$$

借鉴问题一二的方法，经过 *Matlab* 计算求得 $s = 24.3\text{m}$ ， $G_{\text{球}} = 25380\text{N}$ ，此时设计的系泊系统能够达到近似最优。

六、模型评价

优点

- 1、本文利用物理上整体隔离法，很大程度上简化了求钢管倾角等问题。
- 2、悬链线模型合理可靠且符合本题锚链的状态，通过对模型的推导及改进以符合我们的模型要求，使建立的模型在物理学和数学上都有很强的可靠性。

- 3、在第一问我们充分考虑了锚链是否拖地的问题，并分析了锚链刚好不拖地时的临界风速，分状态考虑锚的情况。
- 4、第二题中运用了集合交并集的思想求出重物球的质量范围，在第三问中优化模型将多目标问题转化为单目标求解，体现了优化思维。

缺点

- 1、由于问题的复杂性，忽略了风向与海平面夹角，重物球和锚链浮力等因素的影响，导致模型求解存在一定的偏差。
- 2、第三题列出了优化求解的方法，但具体求解时依旧困难，只能采用逐步优化法得到近似最优解。

七、参考文献

- [1]姜启源. 谢金星. 叶俊. 数学模型[M]. 北京：高等教育出版社, 1998.
- [2]郑丽凤. 周新年. 胡永生. 悬链线理论及其应用研究[A]. 福建：福建农林大学出版社, 2002.
- [3]悬链线_百度百科
http://baike.baidu.com/link?url=BPCAHPx_imVRwD807xYEtb9JhjZBqF-U62Uk6U8LpL9G0ji0EQXXCC2lHtWc800pevIFI5z5X3S2tAVvtqXVva#3 , 2016-9-11
- [4]唐友刚. 张素侠. 张若瑜. 深海系泊系统动力特性研究进展[A]. 天津：天津大学出版社. 2008
- [5]苏一华. 杨建民. 肖龙飞. 基于静力相似的水深截断系泊系统多目标优化设计. 上海. 上海交通大学出版社:2007 年
- [6]王磊 单点系泊系统的动力学研究. 2012

附录

1. 临界点选取

```
function q=myfun1(p)
v=p(1);
xt=p(2);
Fguan=98-19.723;
Ftong=980-710.04;
Fqiu=11760;
Fliau=1512.63;
Ffu=4*Fguan+Ftong+Fqiu+Fliau;
lguan=1;
ltong=1;
g=9.8;
a=7;
syms x
lc=(Ffu+9800)/pi/1025/g;
Ffen=0.625*v^2*(2-lc);
cos1=Ffu/sqrt(Ffen^2+Ffu^2);
cos2=(Ffu-Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-Fguan)^2);
cos3=(Ffu-2*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-2*Fguan)^2);
cos4=(Ffu-3*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-3*Fguan)^2);
cos5=(Ffu-4*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-4*Fguan)^2);
lt=lguan*(cos1+cos2+cos3+cos4)+ltong*cos5+lc;
y=Ffen/a/g*cosh(a*g/Ffen*x)-Ffen/a/g;
dy=sinh(a*g/Ffen*x);
q(1)=double(int(sqrt(1+dy^2),0,xt))-22.05;
q(2)=lt+subs(y,xt)-18;

x=fsolve('myfun1',[24,15]',optimset('Display','off'))
```

2. 拖地情况

```
function q=myfun2(p)
x1=p(1);
xt=p(2);
Fguan=98-19.723;
Ftong=980-710.04;
Fqiu=11760;
Fliau=1512.63;
lguan=1;
ltong=1;
g=9.8;
a=7;
v=12;
```

```

syms x
Ffu=4*Fguan+Ftong+Fqiu+Flia-x1*a*g;
lc=(Ffu+9800)/pi/1025/g;
Ffen=0.625*v^2*(2-lc);
cos1=Ffu/sqrt(Ffen^2+Ffu^2);
cos2=(Ffu-Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-Fguan)^2);
cos3=(Ffu-2*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-2*Fguan)^2);
cos4=(Ffu-3*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-3*Fguan)^2);
cos5=(Ffu-4*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-4*Fguan)^2);
lt=lguan*(cos1+cos2+cos3+cos4)+ltong*cos5+lc;
y=Ffen/a/g*cosh(a*g/Ffen*x)-Ffen/a/g;
dy=sinh(a*g/Ffen*x);
q(1)=double(int(sqrt(1+dy^2),0,xt))+x1-22.05;
q(2)=1t+subs(y,xt)-18;

```

```

x=fsolve('myfun2',[10,10]',optimset('Display','off'))

```

3. 未拖地以及临界点情况 (注: 未拖地时 Fla=0)

```

function q=myfun3(p)
Ffu=p(1);
xt=p(2);
Fguan=98-19.723;
Ftong=980-710.04;
Fqiu=11760;
Flia=1512.63;
lguan=1;
ltong=1;
g=9.8;
a=7;
v=36;
syms x
lc=(Ffu+9800)/pi/1025/g;
Ffen=0.625*v^2*(2-lc);
Fla=Ffu-Fguan*4-Ftong-Fqiu-Flia;
cos1=Ffu/sqrt(Ffen^2+Ffu^2);
cos2=(Ffu-Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-Fguan)^2);
cos3=(Ffu-2*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-2*Fguan)^2);
cos4=(Ffu-3*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-3*Fguan)^2);
cos5=(Ffu-4*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-4*Fguan)^2);
lt=lguan*(cos1+cos2+cos3+cos4)+ltong*cos5+lc;

y=Ffen/a/g*cosh(a*g/Ffen*x+asinh(Fla/Ffen))-Ffen/a/g*cosh(asinh(Fla/Ffen));
dy=sinh(a*g/Ffen*x+asinh(Fla/Ffen));
q(1)=double(int(sqrt(1+dy^2),0,xt))-22.05;

```

```
q(2)=1t+subs(y, xt)-18;
```

```
x=fsolve('myfun3', [14000, 15]', optimset('Display', 'off'))
```

4. 第三题平衡状态求解

```
function q=myfun4(p)
Fqiu=p(1);
xt=p(2);
Fguan=98-19.723;
Ftong=980-710.04;
Fliau=1512.63;
lguan=1;
ltong=1;
g=9.8;
a=7;
v=36;
syms x
Ffu=4*Fguan+Ftong+Fqiu+Fliau;
lc=(Ffu+9800)/pi/1025/g;
Ffen=0.625*v^2*(2-lc);
cos1=Ffu/sqrt(Ffen^2+Ffu^2);
cos2=(Ffu-Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-Fguan)^2);
cos3=(Ffu-2*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-2*Fguan)^2);
cos4=(Ffu-3*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-3*Fguan)^2);
cos5=(Ffu-4*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-4*Fguan)^2);
1t=lguan*(cos1+cos2+cos3+cos4)+ltong*cos5+lc;
y=Ffen/a/g*cosh(a*g/Ffen*x)-Ffen/a/g;
dy=sinh(a*g/Ffen*x);
q(1)=double(int(sqrt(1+dy^2), 0, xt))-22.05;
q(2)=1t+subs(y, xt)-18;
```

```
x=fsolve('myfun4', [25000, 15]', optimset('Display', 'off'))
```

5. 角度为 5 度时

```
function q=myfun5(p)
Fqiu=p(1);
xt=p(2);
Fguan=98-19.723;
Ftong=980-710.04;
Fliau=1512.63;
lguan=1;
ltong=1;
g=9.8;
a=7;
```

```

v=36;
lc=0.941;
Ffu=pi*lc*1025*g-9800;
syms x
Ffen=0.625*v^2*(2-lc);
Fla=Ffu-Fguan*4-Ftong-Fqiu-Flia;
cos1=Ffu/sqrt(Ffen^2+Ffu^2);
cos2=(Ffu-Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-Fguan)^2);
cos3=(Ffu-2*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-2*Fguan)^2);
cos4=(Ffu-3*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-3*Fguan)^2);
cos5=(Ffu-4*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-4*Fguan)^2);
lt=lguan*(cos1+cos2+cos3+cos4)+ltong*cos5+lc;
y=Ffen/a/g*cosh(a*g/Ffen*x+asinh(Fla/Ffen))-Ffen/a/g*cosh(asinh(Fla/Ffen));
dy=sinh(a*g/Ffen*x+asinh(Fla/Ffen));
q(1)=double(int(sqrt(1+dy^2),0,xt))-22.05;
q(2)=lt+subs(y,xt)-18;

x=fsolve('myfun5',[15000,15]','optimset('Display','off'))

```

6. 角度为 16 度时

```

function q=myfun6(p)
Fqiu=p(1);
xt=p(2);
Fguan=98-19.723;
Ftong=980-710.04;
Flia=1512.63;
lguan=1;
ltong=1;
g=9.8;
a=7;
v=36;
syms x

Ffu=(Fqiu+4*Fguan+Ftong+Flia+0.625*v^2*tan(16/180*pi)*(2-9800/pi/1025/g))
/(1+0.625*v^2*tan(16/180*pi)/pi/1025/g);
lc=(Ffu+9800)/pi/1025/g;
Ffen=0.625*v^2*(2-lc);
Fla=Ffu-Fguan*4-Ftong-Fqiu-Flia;
cos1=Ffu/sqrt(Ffen^2+Ffu^2);
cos2=(Ffu-Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-Fguan)^2);
cos3=(Ffu-2*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-2*Fguan)^2);
cos4=(Ffu-3*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-3*Fguan)^2);
cos5=(Ffu-4*Fguan)/sqrt(Ffen^2+(Ffu-4*Fguan)^2);
lt=lguan*(cos1+cos2+cos3+cos4)+ltong*cos5+lc;

```

```
y=Ffen/a/g*cosh(a*g/Ffen*x+asinh(Fla/Ffen))-Ffen/a/g*cosh(asinh(Fla/Ffen));  
dy=sinh(a*g/Ffen*x+asinh(Fla/Ffen));  
q(1)=double(int(sqrt(1+dy^2), 0, xt))-22.05;  
q(2)=1t+subs(y, xt)-18;  
  
x=fsolve('myfun6', [15000, 15]', optimset('Display', 'off'))
```