

太阳影子定位研究模型

摘要

本文针对太阳影子定位问题,通过非线性最小二乘拟合模型、最优化问题、CAD 软件制图、零点函数等建立数学模型,综合分析求解固定杆的经纬度定位和视频拍摄地点及日期等问题。

针对问题一,利用地理学中的太阳高度角公式和几何学知识,建立影子长度变化规律的数学模型,分析影子长度的影响参数有太阳赤纬、地理经纬度和时角,考虑天安门广场当地时间和北京时间的时差,天安门广场正午时刻的北京时间为 12.24 时,利用此模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

针对问题二,预处理附录 1 中的坐标数据,计算出不同时间下的影子长度,利用 `lsqcurvefit` 函数计算出当地时差,再使用经度公式计算得到当地的经度;非线性拟合影子长度关于纬度、杆长和赤纬三个参数的曲线,将问题转化为最优化问题,利用 `lsqcurvefit` 函数算出纬度、杆长和赤纬,位置在北纬 19.2858 度,东经 108.7215 度(海南省)。

针对问题三,经度和纬度的计算方法与问题二中的一致,利用赤纬计算公式,由赤纬值和零点函数求得日期,得到附件二的测量地位置为新疆维吾尔自治区,经纬度坐标是北纬 39.8951,经度 79.7490,测量日期为 2015 年 6 月 20 日或 2015 年 4 月 25 日;附件三测量地位置为湖北省,经度坐标是北纬 32.8472,经度 110.2455,测量日期为 2015 年 10 月 23 日或 2015 年 2 月 6 日。

针对问题四,通过每两分钟截取一次视频,得到了 21 张杆子影子图片。使用 CAD 制图软件分别测量图片中杆子影子的长度,借助比例公式求出实际影子的长度,得到影子长度随时间变化数据;使用问题三中所建立的数学模型对数据进行处理,算出拍摄点的经纬度,位置约在东经 111.0135 度,北纬 42.0732 度(内蒙古)。

针对问题五,由问题四计算得到的杆子的影长随时间变化数据,使用问题二中建立的数学模型,得到了两个拍摄地点经纬度,由于太阳直射点在春分-秋分作周期运动,对于一个地理坐标可以得到两个日期。从而在拍摄日期未知时,仍然可以根据视频确定出拍摄地点与日期。得出位置经纬度为北纬 41.9462 度,东经 112.8705 度(内蒙古),拍摄日期为日期为 6 月 21 日或 4 月 25 日。

关键词: 太阳高度角公式 最小二乘拟合 CAD 软件制图 零点函数

一、问题重述

1.1 问题背景

影子是由于物体遮住了光线的传播,不能穿过不透明物体而形成的较暗区域,就是我们常说的影子,它是一种光学现象。影子长度与季节、当日时间、物体高度和地理位置等有关,如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面,太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化,确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

1.2 要解决的问题

1. 建立影子长度变化的数学模型,分析影子长度关于各个参数的变化规律,并应用建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒, 39.907222 东经 116 度 23 分 29 秒) 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

2. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据,建立数学模型确定直杆所处的地点。将模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据,给出若干个可能的地点。

3. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据,建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据,给出若干个可能的地点与日期。

4. 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频,并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型,并应用模型给出若干个可能的拍摄地点。

5. 如果拍摄日期未知,根据视频确定出拍摄地点与日期。

二、问题分析

2.1 问题的总体分析

本题主要通过影子长度的变化和时间的确定拍摄地点和日期。建立影子长度随时间的变化曲线,分析曲线最低点,确定时差,从而求出经度;根据影子长度和时间的多组数据,拟合影长关于物体长度、赤纬和纬度的曲线,确定物体长度、赤纬和纬度。而赤纬和日期有关系,通过赤纬可求得日期。通过实际和视频中的影长和物体长度的比例相等的关系,计算出实际物体影长,继而按照上述分析确定拍摄地点的经纬度和拍摄日期。

2.2 具体问题分析

(1)针对问题一,利用天文学知识将太阳光线的照射情况转化为几何知识,建立影子长度变化规律模型,分析影子长度的影响因素,建立影子长度和北京时间的函数关系,用 matlab 画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

(2) 针对问题二，根据附件一中影子长度和北京时间的数据，对影子长度和时间进行拟合，计算出正午时刻的北京时间，算出经度，通过拟合影子长度关于纬度的曲线，从而计算出纬度。

(3) 针对问题三，问题三比问题二少一个已知量日期，通过非线性拟合影子长度关于纬度和赤纬的曲线，计算出经纬度和赤纬，通过日期和赤纬的关系，求出日期。

(4) 针对问题四，问题四的难点在于实际影长的确定，通过 CAD 制图软件计算出视频中影长和物体长度的比例，利用实际中和视频中的影长和物体长度的比例相等的关系，实际物体长度已知，求出各时间下的影长。利用分析(3)中相同方法，确定拍摄地点。

(5) 针对问题五，在未知拍摄时间下，还是可以求出实际影长和时间，通过非线性拟合影长和赤纬和经纬度，确定拍摄地点。

三、模型假设

1. 假设模型中均已修正大气折射等因素。
2. 假设量取视频中的长度误差很小，可以忽略。
3. 忽略平闰年的影响。
4. 忽略天气对影子长度的影响。

四、符号说明

符号	意义
t_1	日角
δ	太阳赤纬
φ	地理纬度
γ	地理经度
t	时角
β	纬度差
h	太阳高度角
z	影子长度
d	距离
Δt	时差
a, b, c	系数
f	零点函数

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：画出影子长度变化曲线

5.1.1 模型建立

利用地理天文学知识，将太阳光照射地面的情况转化为几何图形，如图 1。

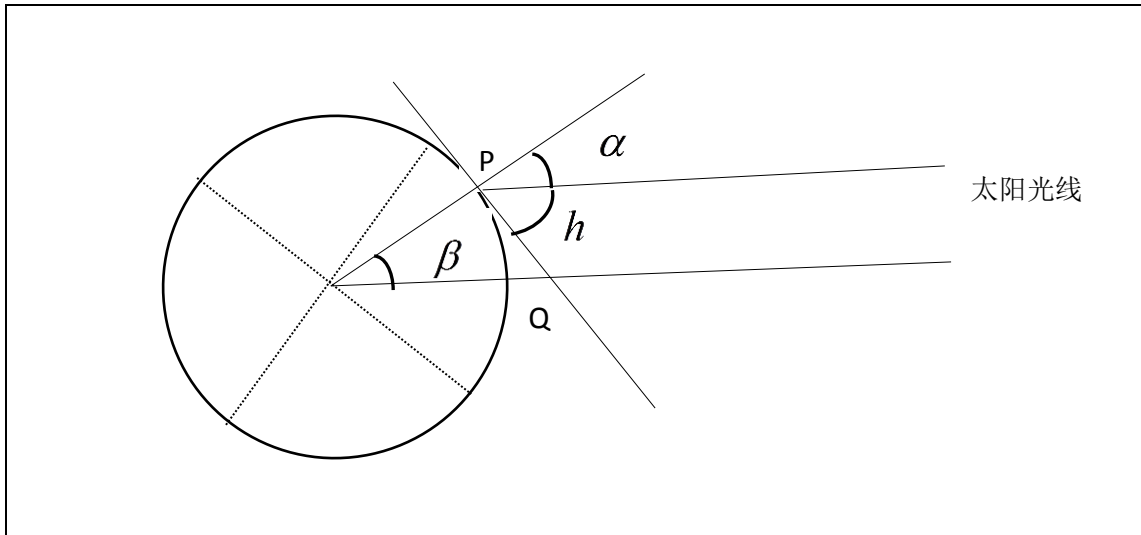


图 1 太阳高度角

对于地球上的某个地点 P ，太阳高度角是指太阳光的入射方向和地平面之间的夹角，记为 h ，地点 P 的纬度和赤纬的差值记为 β ，记太阳赤纬为 δ ，地点 P 的地理纬度为 φ ，地理经度为 γ ，根据物理中光线的平行性和几何学中平行、垂直性质，有

$$\beta = \alpha$$

$$\alpha + h = \pi/2$$

$$\beta = \varphi - \delta$$

推出太阳高度角

$$\sin h = \cos \delta \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi$$

考虑到当日具体时间的变化，同理可导出准确太阳高度角公式

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \theta(t)$$

太阳高度角

$$h = \arcsin[\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \theta(t)]$$

其中 t 为北京时间 (单位: h), $\theta(t)$ 表示当地时角, 它与当地经度、时差有关, 时角以小时来计量 ($1\text{HA} = 15$ 度), 当地正午时 (12 时) 的时角为 0, 可由以下公式计算出, 当地时角公式:

$$\theta(t) = \frac{15(t - \frac{\gamma - 120}{15}) - 180}{360} \times 2\pi$$

太阳赤纬可由公式获取。太阳赤纬计算公式为:

$$\text{ED} = 0.3723 + 23.2567\sin t_1 + 0.1149\sin 2t_1 - 0.1712\sin 3t_1 - 0.758\cos t_1 + 0.3656\cos 2t_1 + 0.0201\cos 3t_1$$

其中 t_1 称日角, $t_1 = \frac{2\pi x}{365.2422}$

这里 x 由两部分组成, 即 $x = N - N_0$

式中 N 为积日, 积日即为日期在年内的顺序号。

$$N_0 = 79.6764 + 0.2422 \times (\text{年份} - 1985) - \text{INT}(\text{年份} - 1985) / 4$$

式中 INT 表示进行取整运算。

物体成像示意图见图 2, h 为太阳高度角, y 为物体高度, z 为影子长度。

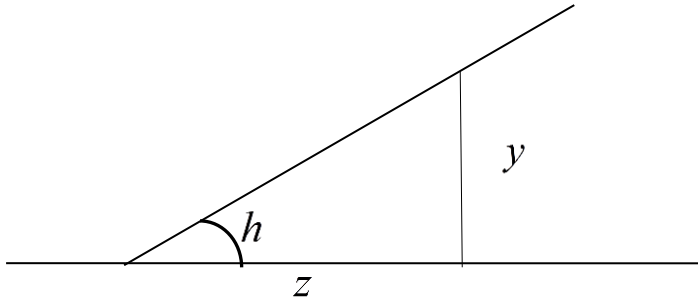


图 2 物体成像示意图

根据三角函数求得影子长度

$$z = y \cot h$$

将求得的太阳高度角公式代入上式, 得出影子长度与北京时间的 $z-t$ 函数

$$z = y \cot \arcsin [\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \theta(t)]$$

5.1.2 模型求解

北京时间经度为 E120, 天安门广场经纬度为北纬 39 度 54 分 26 秒, 东经 116 度 23 分 29 秒为 116 度 23 分 29 秒, 即纬度 39.907222 度、经度 116.39133 度。

利用太阳赤纬公式

$$ED = 0.3723 + 23.2567\sin t_1 + 0.1149\sin 2t_1 - 0.1712\sin 3t_1 - 0.758\cos t_1 \\ + 0.3656\cos 2t_1 + 0.0201\cos 3t_1$$

计算出天安门广场 2015 年 10 月 22 日的太阳赤纬 $\delta = -10.8627^\circ$ ，程序见附录一。

利用时角公式

$$\theta(t) = \frac{15(t - \frac{\gamma - 120}{15}) - 180}{360} \times 2\pi$$

计算出表达式

$$\theta(t) = \frac{15(t + 0.2406) - 180}{360} \times 2\pi$$

代入模型的 $z-t$ 函数得出

$$z = 3 \cot \arcsin[\sin(-10.8627^\circ) \sin 39.907222^\circ \\ + \cos(-10.8627^\circ) \cos 39.907222^\circ \cos \frac{15(t + 0.2406) - 180}{360} \times 2\pi]$$

利用 matlab 画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线，如图 3。

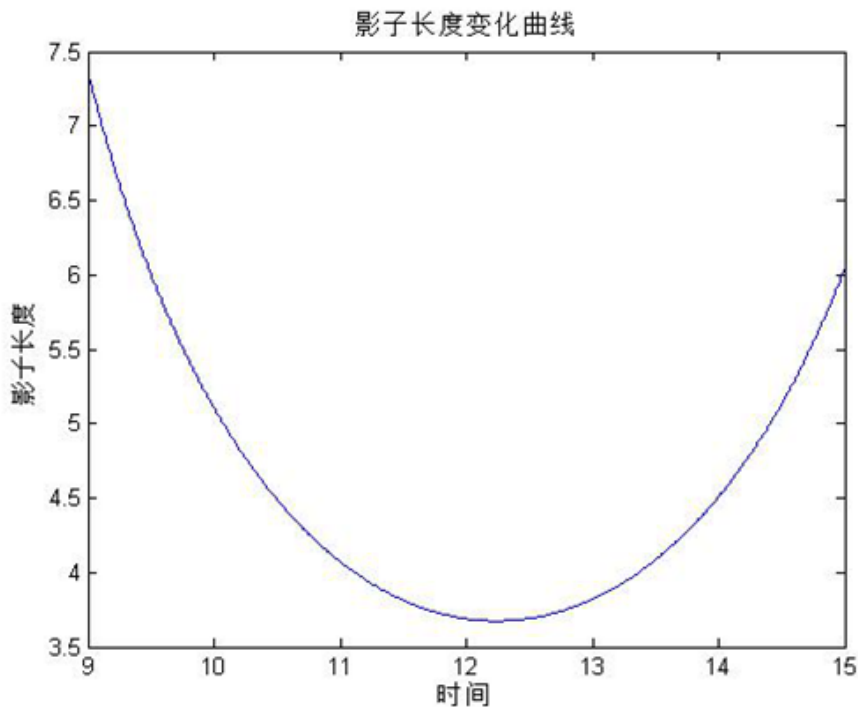


图 3 天安门广场杆子的影子长度随时间变化图

5.2 问题二：根据影子顶点坐标确定直杆地点

5.2.1 模型建立

(1) 数据预处理

根据给出的时间和影子顶点坐标 (x_i, y_i) ，将时间全部转化为小时，利用原点到某点的距离公式 $d = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ ，算出不同时间下的影子长度。

北京时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	北京时间(时)	杆子影长(米)
a 点 b 分	x_i	y_i	$a+b/60$	$\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$

(2) 经度计算，先使用经度公式

$$\gamma = 120 - 15(t_m - 12)$$

计算出经度，再用时角公式：

$$\theta(t) = \frac{15(t - \frac{\gamma - 120}{15}) - 180}{360} \times 2\pi$$

(3) 纬度计算，使用赤纬计算公式

$$ED = 0.3723 + 23.2567\sin t_1 + 0.1149\sin 2t_1 - 0.1712\sin 3t_1 - 0.758\cos t_1 + 0.3656\cos 2t_1 + 0.0201\cos 3t_1$$

计算出 2015 年 4 月 18 日该地点的太阳赤纬为 10.6305 度。

根据已求的经度，预处理北京时间，利用时角公式

$$\theta(t) = \frac{15(t - \frac{\gamma - 120}{15}) - 180}{360} \times 2\pi$$

可计算出当地的时角。

利用非线性曲线拟合，拟合影长关于纬度和杆长的曲线

$$z = y \cot \arcsin [\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \theta(t)]$$

则将问题转化为最优化问题：

$$\min F(y, \varphi) = \sum_{i=1}^{21} \{ y \cot \arcsin [\sin \delta \sin \varphi_i + \cos \delta \cos \varphi_i \cos \theta(t_i)] - z_i \}^2$$

使用 lsqcurvefit 函数，求出纬度 φ 和杆长 y ，程序见附录五、附录六。

(4) 综上，可计算出直杆地点的经纬度，实现定位。

5.2.2 模型求解

(1) 对附件 1 数据进行预处理，计算出时间和影长，如表 1。

表 1 预处理影长和时间数据表格

北京时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	北京时间(时)	杆子的影长
------	---------	---------	---------	-------

14:42	1.0365	0.4973	14.7	1.149626
14:45	1.0699	0.5029	14.75	1.182199
14:48	1.1038	0.5085	14.8	1.215297
14:51	1.1383	0.5142	14.85	1.249051
14:54	1.1732	0.5198	14.9	1.283195
14:57	1.2087	0.5255	14.95	1.317993
15:00	1.2448	0.5311	15	1.353364
15:03	1.2815	0.5368	15.05	1.389387
15:06	1.3189	0.5426	15.1	1.426153
15:09	1.3568	0.5483	15.15	1.463400
15:12	1.3955	0.5541	15.2	1.501482
15:15	1.4349	0.5598	15.25	1.540232
15:18	1.4751	0.5657	15.3	1.579853
15:21	1.516	0.5715	15.35	1.620145
15:24	1.5577	0.5774	15.4	1.661271
15:27	1.6003	0.5833	15.45	1.703291
15:30	1.6438	0.5892	15.5	1.746206
15:33	1.6882	0.5952	15.55	1.790051
15:36	1.7337	0.6013	15.6	1.835014
15:39	1.7801	0.6074	15.65	1.880875
15:42	1.8277	0.6135	15.7	1.927918

(2) 利用解最优化约束问题最优解的方法，使用 `lsqcurvefit` 函数，解出了纬度 φ ，时差 t_m 和杆长 y ，分别为

$$\varphi = 19.2858^\circ, y = 2.0336, t_m = 0.6755$$

程序见附录五、附录六。

(3) 经度计算

$$\gamma_0 = 120 - 15(t_m - 12) = 108.7215$$

程序见附录三、附录四。

(4) 综上，杆子位置在 $(19.2858^\circ N, 108.7215^\circ E)$ 北纬 19.2858 度，东经 108.7215 度为，即位置在：海南省。

5.2.3 模型检验

利用问题二的模型算出的经纬度、赤纬和杆长，使用问题一的影子长度变化模型，画出影子长度变化曲线，在曲线上标出附件一所给点的坐标来验证拟合的优度，影子长度变化的曲线和附件一所有点的坐标标注见图 2，程序见附录十一。

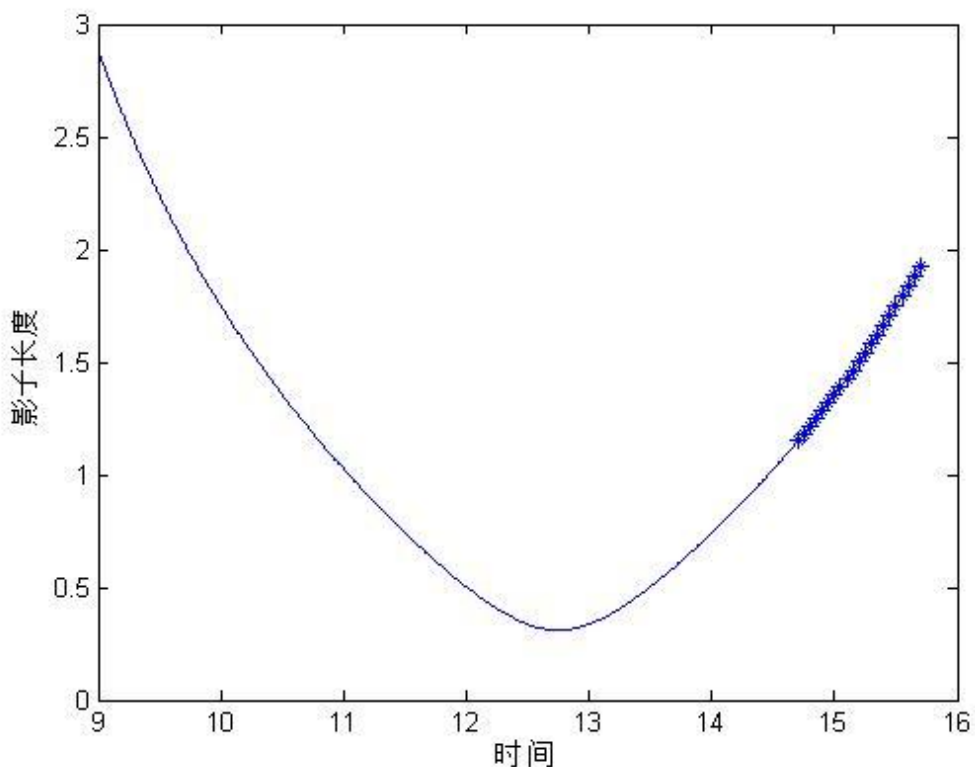


图 2 模型检验

分析图 2 可以观察到曲线拟合效果较好。

5.3 问题三：根据影子顶点坐标确立直杆日期与地点模型

5.3.1 模型建立

(1) 数据预处理

根据给出的时间和影子顶点坐标 (x_i, y_i) ，将时间全部转化为以小时为单位，

利用原点到某点的距离公式 $d = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ ，算出不同时间下的影子长度。

北京时间	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	北京时间 (时)	杆子影长 (米)
a 点 b 分	x_i	y_i	$a + b/60$	$\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$

(2) 经度计算

据此可算出时差 $\Delta t = (t_m - 12)$ ，从而计算出经度差 $\Delta E = 15 \times \Delta t$ ，经度公式

$$\gamma = 120 - 15(t_m - 12)$$

单位为：度

(3) 纬度、赤纬和杆长的计算

拟合影长关于纬度、杆长和赤纬的曲线

$$z = y \cot \arcsin [\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \theta(t)]$$

则将问题转化为最优化问题:

$$\min F(y, \varphi, \delta, t_m) = \sum_{i=1}^{21} \{y \cot \arcsin [\sin \delta_i \sin \varphi_i + \cos \delta_i \cos \varphi_i \cos \theta(t_i)] - z_i\} \quad 2$$

使用 lsqcurvefit 函数, 求出纬度 φ 、赤度 δ 和杆长 y 。

(4) 日期的确定

太阳赤纬计算公式:

$$\begin{aligned} \text{ED}(t_1) = & 0.3723 + 23.2567 \sin t_1 + 0.1149 \sin 2t_1 - 0.1712 \sin 3t_1 - 0.758 \cos t_1 \\ & + 0.3656 \cos 2t_1 + 0.0201 \cos 3t_1 \end{aligned}$$

用赤纬与日期的关系, 由赤纬反求日期。利用函数零点求出 t_1 (积日)。

令赤纬-时间函数

$$\begin{aligned} f(t_1) = & \text{ED}(t_1) - [0.3723 + 23.2567 \sin t_1 + 0.1149 \sin 2t_1 - 0.1712 \sin 3t_1 - 0.758 \cos t_1 \\ & + 0.3656 \cos 2t_1 + 0.0201 \cos 3t_1] = 0 \end{aligned}$$

代入赤纬 $\text{ED}(t_1)$, 通过求函数 $f(t_1)$ 的零点, 求出 t_1 确定日期。

(5) 综上, 可计算出直杆地点的经纬度和日期。

5.3.2 模型求解

5.3.2.1 对附件二求解

(1) 对附件 2 数据进行预处理, 计算出时间和影长, 如表 3。

表 3 预处理影长和时间数据表格 (附件 2)

北京时间	x 坐标 (米)	y 坐标 (米)	北京时间 (时)	杆子的影长
12:41	-1.2352	0.173	12.683	1.247256
12:44	-1.2081	0.189	12.733	1.222795
12:47	-1.1813	0.2048	12.783	1.198921
12:50	-1.1546	0.2203	12.833	1.175429
12:53	-1.1281	0.2356	12.883	1.152440
12:56	-1.1018	0.2505	12.933	1.129917
12:59	-1.0756	0.2653	12.983	1.107835
13:02	-1.0496	0.2798	13.033	1.086254
13:05	-1.0237	0.294	13.083	1.065081
13:08	-0.998	0.308	13.133	1.044446
13:11	-0.9724	0.3218	13.183	1.024264
13:14	-0.947	0.3354	13.233	1.004640
13:17	-0.9217	0.3488	13.283	0.985491

13:20	-0.8965	0.3619	13.333	0.966790
13:23	-0.8714	0.3748	13.383	0.948585
13:26	-0.8464	0.3876	13.433	0.930928
13:29	-0.8215	0.4001	13.483	0.913752
13:32	-0.7967	0.4124	13.533	0.897109
13:35	-0.7719	0.4246	13.583	0.880974
13:38	-0.7473	0.4366	13.633	0.865492
13:41	-0.7227	0.4484	13.683	0.850504

(2) 利用解最优化约束问题最优解的方法, 使用 lsqcurvefit 函数, 程序运行结果: (见附录七、八)
运行结果

x =	0.6414	2.0008	0.3545	2.6834
-----	--------	--------	--------	--------

则有:

$$\text{纬度为 } \varphi_2 = \arcsin(0.6414) / 2\pi \times 360 = 39.8951^\circ$$

经度为

$$\gamma = 120 - 15(t_m - 12) = 79.7490$$

杆长 $y_2 = 2.0008$ 米

$$\text{赤纬为 } \delta_2 = \arcsin(0.3545) / 2\pi \times 360 = 20.7640^\circ$$

经纬位置在东经 71.960 度, 北纬 30.9168 度, 大概位置。

(4) 将已求的赤纬值代入赤纬-日期零点函数, 得出日期。

$$f(t_1) = ED(t_1) - [0.3723 + 23.2567 \sin t_1 + 0.1149 \sin 2t_1 - 0.1712 \sin 3t_1 - 0.758 \cos t_1 + 0.3656 \cos 2t_1 + 0.0201 \cos 3t_1] = 0$$

首先假设年份为 2015 年,

$$x = N - N0$$

$$N0 = 79.9424$$

代入零点公式, 运行下列程序:

```
fzero('6.7151-(0.3723+23.2567*sin(2*pi*x/365.2422-1.3752))+0.1149*
sin(2*(2*pi*x/365.2422-1.3752))-0.1712*sin(3*(2*pi*x/365.2422-1.3752))
)-0.758*cos(2*pi*x/365.2422-1.3752)+0.3656*cos(2*(2*pi*x/365.2422-1.3752))
)+0.0201*cos(3*(2*pi*x/365.2422-1.3752))',180)% 求零点值
```

当赋初值为 180 时, 即当天的积日为 201, 日期为 6 月 20 日;

当赋初值为 150 时, 即积日为 145, 日期为 4 月 25 日。

(5) 综上得到附件二给出的地点为东经 79.7490 度，北纬 39.8951 度，位置为新疆，日期为 6 月 20 日或日期为 4 月 25 日。

5.3.2.2 对附件三求解

(1) 对附件 3 数据进行预处理，计算出时间和影长，如表 4。

表 4 预处理影长和时间数据表格（附件 3）

北京时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	北京时间(时)	杆子的影长
13:09	1.1637	3.336	13.15	3.533142184
13:12	1.2212	3.3299	13.2	3.546768029
13:15	1.2791	3.3242	13.25	3.561797643
13:18	1.3373	3.3188	13.3	3.578100715
13:21	1.396	3.3137	13.35	3.595750783
13:24	1.4552	3.3091	13.4	3.61493428
13:27	1.5148	3.3048	13.45	3.635425983
13:30	1.575	3.3007	13.5	3.657218272
13:33	1.6357	3.2971	13.55	3.680541115
13:36	1.697	3.2937	13.6	3.705167836
13:39	1.7589	3.2907	13.65	3.731278025
13:42	1.8215	3.2881	13.7	3.758917911
13:45	1.8848	3.2859	13.75	3.788087888
13:48	1.9488	3.284	13.8	3.818701015
13:51	2.0136	3.2824	13.85	3.850809619
13:54	2.0792	3.2813	13.9	3.88458522
13:57	2.1457	3.2805	13.95	3.919911828
14:00	2.2131	3.2801	14	3.956875992
14:03	2.2815	3.2801	14.05	3.99553479
14:06	2.3508	3.2804	14.1	4.035750835
14:09	2.4213	3.2812	14.15	4.077863059

(2) 利用解最优化约束问题最优解的方法，使用 lsqcurvefit 函数，程序运行结果：通过运行 M 文件和主程序得到结果为：

<p>x =</p> <p>0.5424 3.0356 -0.2750 0.6503</p>

则有：

$$\text{纬度为 } \varphi_2 = \arcsin(0.5424) / 2\pi \times 360 = 32.8472^\circ$$

经度为

$$\gamma = 120 - 15(t_m - 12) = 110.2455$$

杆长 $y_2 = 3.0356$ 米

赤纬为 $\delta_2 = \arcsin(-0.2750) / 2\pi \times 360 = -15.9620$

经纬度坐标位置为湖北省十堰市。

(4) 将已求的赤纬值代入赤纬-日期零点函数，得出日期。

$$f(t_1) = ED(t_1) - [0.3723 + 23.2567 \sin t_1 + 0.1149 \sin 2t_1 - 0.1712 \sin 3t_1 - 0.758 \cos t_1 + 0.3656 \cos 2t_1 + 0.0201 \cos 3t_1] = 0$$

首先假设年份为 2015 年

```
fzero(' -15.9620-(0.3723+23.2567*sin(2*pi*x/365.2422-1.3752))+0.1149*sin(2*(2*pi*x/365.2422-1.3752))-0.1712*sin(3*(2*pi*x/365.2422-1.3752))-0.758*cos(2*pi*x/365.2422-1.3752)+0.3656*cos(2*(2*pi*x/365.2422-1.3752))+0.0201*cos(3*(2*pi*x/365.2422-1.3752))', 180)% 求零点值
```

运行结果：

当赋初值为 50 时，结果为 37，日期为 2 月 6 日，

当赋初值为 200 时，结果为 311，日期为 10 月 23 日。

(5) 得到附件三的地点为东经 110.2455 度，北纬 32.8472 度，日期为 2 月 6 日或 10 月 23 日。

5.4 问题四：根据视频预测若干个可能的拍摄地点

5.4.1 模型建立

(1) 赤纬计算

根据问题一中的模型，赤纬与日期的关系式

$$ED = 0.3723 + 23.2567 \sin t_1 + 0.1149 \sin 2t_1 - 0.1712 \sin 3t_1 - 0.758 \cos t_1 + 0.3656 \cos 2t_1 + 0.0201 \cos 3t_1$$

由视频中的日期可以计算出拍摄地点的赤纬。

(2) 实际影长

利用 CAD 制图软件测量得出从视频中截取的 21 张图像中的杆长和影长的长度。

记视频中的杆长和影长分别为 y', l' ，实际的杆长和影长分别为 y, l ，其中

$y = 2$ ，根据放射性质，有

$$\frac{y}{l} = \frac{y'}{l'}$$

则实际影长 $l = \frac{yl''}{y'} = 2 \frac{l''}{y'}$.

(3) 纬度的计算

拟合影长关于纬度曲线

$$z = 2 \cot \arcsin [\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \theta(t)]$$

则将问题转化为最优化问题:

$$\min F(\varphi, t_m) = \sum_{i=1}^{21} \{2 \cot \arcsin [\sin \delta \sin \varphi_i + \cos \delta \cos \varphi_i \cos \theta(t_i)] - z_i\}^2$$

使用 lsqcurvefit 函数, 求出纬度 φ 和时差 t_m .

5.4.2 模型求解

(1) 赤纬计算公式

$$ED = 0.3723 + 23.2567 \sin t_1 + 0.1149 \sin 2t_1 - 0.1712 \sin 3t_1 - 0.758 \cos t_1 + 0.3656 \cos 2t_1 + 0.0201 \cos 3t_1,$$

2015 年 7 月 13 日积日为 184, 代入赤纬计算公式, 计算出

赤纬 $\delta_4 = 23.0049^\circ$ 。

(2) 利用 CAD 制图软件, 计算视频中的杆长和影长, 见图 3。



图 3 CAD 测量的影长和杆长

使用实际影长 $l = \frac{yl''}{y'} = 2 \frac{l''}{y'}$ 公式, 算出各时间点的实际影长, 见表 5.

表 5 利用杆长与影长的比例算出各时间点的实际影长

时间	图片中的影长	图片的杆长	实际杆长	实际影长
8:54:10	109.19	93.63	2	2.332372
8:56:10	108.2	93.63	2	2.311225
8:58:10	106.23	93.63	2	2.269145
9:00:10	104.91	93.63	2	2.240948
9:02:10	103.93	93.63	2	2.220015
9:04:10	102.61	93.63	2	2.191819
9:06:10	101.95	93.63	2	2.177721
9:08:10	99.65	93.63	2	2.128591
9:10:10	99.32	93.63	2	2.121542
9:12:10	97.68	93.63	2	2.086511
9:14:10	96.36	93.63	2	2.058315
9:16:10	95.7	93.63	2	2.044217
9:18:10	93.73	93.63	2	2.002136
9:20:10	93.07	93.63	2	1.988038
9:22:10	91.43	93.63	2	1.953007
9:24:10	90.44	93.63	2	1.931859
9:26:10	88.47	93.63	2	1.889779
9:28:10	87.48	93.63	2	1.868632
9:30:10	86.82	93.63	2	1.854534
9:32:10	83.54	93.63	2	1.784471
9:34:10	81.86	93.63	2	1.748585

(3) 利用解最优化约束问题最优解的方法，使用 `lsqcurvefit` 函数，算得

$x =$

0.6701 0.5991

纬度为 $\varphi_4 = \arcsin(0.6701) / 2\pi \times 360 = 42.0723^\circ$

经度为：

$$\gamma = 120 - 15(t_m - 12) = 111.0135^\circ$$

综上，拍摄地点的经纬度为东经 111.0135 度，北纬 42.0732 度（内蒙古）。

5.5 问题五：在时间未知下，根据视频推断若干个可能的拍摄地点

在视频拍摄日期未知的情况下，我们可以从视频显示屏上知道拍摄的时间，即时角。直杆高度没变，仍是 2 米。可以使用问题四中方法截取视频中图片，测量得到图片中直杆影子长度与直杆长度，根据公式计算出实际的直杆影子长度。再用最小二乘拟合求出影子长度最小值时间，即正午时间，计算出观测点的经度。再使用最优化约束问题求出纬度。

下面由最小二乘拟合求出纬度和赤纬的最优解：

利用问题二的模型得出：

当赋初值为 (40, 30, 0.6) 时，得出纬度为 41.4602 度，经度为 112.8705 度，赤纬为 20.7444 度，利用赤纬与积日的关系得出日期，

$$ED = 0.3723 + 23.2567\sin t_1 + 0.1149\sin 2t_1 - 0.1712\sin 3t_1 - 0.758\cos t_1 \\ + 0.3656\cos 2t_1 + 0.0201\cos 3t_1$$

日期为 6 月 21 日或 4 月 25 日。

六. 模型评价

6.1 模型缺点

1. 第二、三、四、五问中，本文使用了非线性最小二乘拟合求出了时差、经度和纬度，无法计算或者估计经度误差，无法确定拟合精度是否精确。

2. 第四问中，由于 matlab 版本过低，是 2009a 的版本，读取视频函数无法使用，例如 mmread, VideoReader 函数。因此，本文采用了对附件视频进行截屏的方式来获得每个时刻 t 变动的图像，这里 t 取的值为 2 分钟，共取到了 21 组数据。这样截取的缺点是截取得到的图片大小不一定一样，而使用 matlab 处理得到的帧的大小的相同，这样会测量更多次数的杆长和影长顶点坐标，使得过程更加复杂。

3、由模型算出第五问视频拍摄时间为 6 月 21 日，而由第四问视频可知真正拍摄时间为 7 月 13 日，因此模型存在一定误差。

6.2 模型优点

1. 第一问中，在利用时差计算太阳高度角时，进行了时差修正，根据天安门广场的经度计算出天安门广场和北京时间的时间差，得到了天安门广场的正午时间为 12 点 26 分，使得天安门广场直杆影子随时间变化曲线更准确。

2. 第四问中，无法利用 matlab 函数编程来求得图中的影子和影子的长度，且杆子影子是立体三维空间图，而在图中得到的影子顶点和杆子顶点以杆子和影子顶点交点坐标是平面坐标，运用欧氏距离计算出长度会造成测量误差。我们使用了 CAD 制图软件，建立三维立体空间来测量杆长、影长，误差更小。

七、参考文献

- [1] 王国安、米洪涛，太阳高度角和日出日落时刻太阳方位角一年变化范围的计算，气象与环境科学，30（增刊），161-164, 2007 年。
- [2] 刘魁敏，计算机绘图，北京：机械工业出版社，2008 年。
- [3] 赵静、但琦，数学建模与数学实验，北京：高等教育出版社，2003 年。
- [4] 郑鹏飞、林大均、刘小洋、吴志庭，基于影子轨迹线反求采光效果的技术研究，华东理工大学学报，36，459-460，2010 年。
- [5] 肖智勇、刘宇翔，一种新的纬度测量方法，大学物理，29，51-53, 2010 年。

八. 附录

附录一:

%计算出天安门广场的太阳赤纬

n=295;%10月22日在2015年内的顺序号

no=79.6764+0.2422*(2015-1985)-7;%7为(年份-1985)/4取整后得到的值

x=n-no;

t=2*pi*x/365.2422;

ED=0.3723+23.2567*sin(t)+0.1149*sin(2*t)-0.1712*sin(3*t)-0.758*cos(t)+0.3656*cos(2*t)+0.0201*cos(3*t)

附录二:

t=9:0.01:15;

h=sin(39.907222/360*2*pi)*sin(-10.8627/360*2*pi)+cos(39.907222/360*2*pi)*cos(-10.8627/360*2*pi)*cos((180-15*(t-0.2406))./360*2*pi)%计算太阳高度角的正弦值

h1=asin(h)%求出太阳高度角

y=3./tan(h1)%计算影子长度

plot(t,y)%画出影子长度变化曲线

xlabel('时间');ylabel('影子长度');

title('影子长度变化曲线')

附录三: %第二问求经度

function f=ff(x,tdata)

f=2*(1./(x(1)*(0.3908)+((1-x(1)^2))^(1/2))*(0.9205)*cos((180-15.*(tdata-x(2)))./360.*2.*pi)).^2-1).^1/2;%其中x(1)为太阳高度角的正弦值

附录四:

tdata=[8.903

8.936

8.969

9.002

9.035

9.068

9.101

9.134

9.167

9.2

9.233

9.266

9.299

9.332

9.365

9.398

9.431

9.464

9.497

9.53


```

15. 15
15. 2
15. 25
15. 3
15. 35
15. 4
15. 45
15. 5
15. 55
15. 6
15. 65
15. 7]’
ydata=[1. 149625826
1. 182198976
1. 215296955
1. 249051052
1. 283195340
1. 317993149
1. 353364049
1. 389387091
1. 426152856
1. 463399853
1. 501481622
1. 540231817
1. 579853316
1. 620144515
1. 661270613
1. 703290633
1. 746205910
1. 790050915
1. 835014272
1. 880875001
1. 927918447]’
x0=[39/360*2*pi, 1];%设置初始值
x=lsqcurvefit('ff', x0, tdata, ydata)%求解 x(1), x(2), 即为纬度和杆长

```

附录七:

%第三问求附件二纬度的 m 文件

function f=ff(x,tdata)

f=x(2)*(1./(x(1)*x(3)+((1-(x(1)^2))^(1/2))*((1-(x(3)^2))^(1/2))*cos((180-15.*(tdata-x(4)))./360.*2.*pi)).^2-1).^(1/2);%其中 x(1)为太阳高度角的正弦值, x(2)为杆的实际长度, x(3)为太阳赤纬, t-0.59为当地北京时间的标准值

附录八:

%第三问求附件二纬度的程序

tdata=[12.683

```
12.733
12.783
12.833
12.883
12.933
12.983
13.033
13.083
13.133
13.183
13.233
13.283
13.333
13.383
13.433
13.483
13.533
13.583
13.633
13.683
]'
ydata=[1.247256205
1.22279459
1.198921486
1.175428964
1.152439573
1.12991747
1.10783548
1.086254206
1.065081072
1.044446265
1.024264126
1.004640314
0.985490908
0.966790494
0.948584735
0.930927881
0.91375175
0.897109051
0.880973762
0.865492259
0.850504468
]'
x0=[39/360*2*pi,1,10/360*2*pi,0.5];
```

```
x=lsqcurvefit('ff',x0,tdata,ydata)
```

附录九:

```
%第三问求附件三纬度的 m 文件
```

```
function f=ff(x,tdata)
```

```
f=x(2)*(1./(x(1)*x(3)+((1-(x(1)^2))^(1/2))*((1-(x(3)^2))^(1/2))*cos((180-15.*(tdata-x(4)))/360.*2.*pi)).^2-1).^1/2;%其中 x(1) 为太阳高度角的正弦值, x(2) 为杆的实际长度, x(3) 为太阳赤纬, t-0.59 为当地北京时间的标准值
```

附录十:

```
%第三问求附件三纬度的程序
```

```
tdata=[13.15
```

```
13.2
```

```
13.25
```

```
13.3
```

```
13.35
```

```
13.4
```

```
13.45
```

```
13.5
```

```
13.55
```

```
13.6
```

```
13.65
```

```
13.7
```

```
13.75
```

```
13.8
```

```
13.85
```

```
13.9
```

```
13.95
```

```
14
```

```
14.05
```

```
14.1
```

```
14.15]'
```

```
ydata=[3.533142184
```

```
3.546768029
```

```
3.561797643
```

```
3.578100715
```

```
3.595750783
```

```
3.61493428
```

```
3.635425983
```

```
3.657218272
```

```
3.680541115
```

```
3.705167836
```

```
3.731278025
```

```
3.758917911
```

```
3.788087888
```

```
3.818701015
```

```

3.850809619
3.88458522
3.919911828
3.956875992
3.99553479
4.035750835
4.077863059]'
x0=[30/360*2*pi,1,20/360*2*pi,0.5];
x=lsqcurvefit('ff',x0,tdata,ydata)
附录十一：
t=9:0.01:15;
h=sin(19.2858/360*2*pi)*0.1845+cos(19.2858/360*2*pi)*0.9828*cos((180-15*(t-0.7519))./360*
2*pi) %计算太阳高度角的正弦值
h1=asin(h) %求出太阳高度角
y=2.0336./(tan(h1)) %计算影子长度
plot(t,y) %画出计算的影子长度变化曲线
xlabel('时间');ylabel('影子长度');
hold on
t=[14.7
14.75
14.8
14.85
14.9
14.95
15
15.05
15.1
15.15
15.2
15.25
15.3
15.35
15.4
15.45
15.5
15.55
15.6
15.65
15.7]
y=[1.149625826
1.182198976
1.215296955
1.249051052
1.283195340

```

```
1.317993149
1.353364049
1.389387091
1.426152856
1.463399853
1.501481622
1.540231817
1.579853316
1.620144515
1.661270613
1.703290633
1.746205910
1.790050915
1.835014272
1.880875001
1.927918447]
plot(t,y,'*') %画出原始数据点
```

