

太阳影子定位模型

摘要

本题要求分析直杆的太阳影子长度变化的相关数据，通过建立模型，确定直杆所在位置以及测量数据的日期。

针对问题一，建立了影子长度变化的数学模型。画出太阳光直射地球正面图，建立相应的空间直角坐标系，并对包含直杆所在点 A 及太阳直射点 B 的最大圆进行几何学分析。建立了直杆影子长度 AF 与直杆影对角 φ 之间的数学模型。并求出 φ 与太阳赤纬角 β ，太阳时角 θ ，测量点的纬度 α 之间的函数关系。查阅资料得到参数 α, β, θ 的变化规律，转化之后即得到直杆影子长度 AF 与各个参数之间的变化规律。

针对问题二，建立确定直杆所处地点的数学模型。分别从影子实际长度 l 和相邻时刻影子的夹角 ζ 两个方面考虑直杆所在地点。一方面，通过对附件 1 中的数据分析，求出实际影子长度比值 l_i / l_{i+1} 。根据问题一中 φ 与各参数 α, β, γ 之间的关系，对直杆所在地点的经度 γ ，纬度 α 采用枚举法，对每一组 (γ, α) 求解出 $l'_i / l'_{i+1} = \tan \varphi'_i / \tan \varphi'_{i+1}$ 的比值，找出实际值与理论值之间的最小方差，即得到若干最优解 (γ, α) 。另一方面，利用附件 1 中的数据求出相邻时刻影子之间的夹角 ζ_i ，再重新定义参数 δ 为影子与正北方向的夹角。与上一方法类似，我们应用参数 δ 通过对直杆所在地点的经度 γ ，纬度 α 采用枚举法，对于每一组 (γ, α) 求解出 $\zeta'_i = \delta_i - \delta_{i+1}$ 作为模拟值，用类似的方法得到若干最优解。最后比较两种方法得到的最优解，得到一个最优解的聚集地，在东经 119 度，北纬 19 度，为中国海南省。

针对问题三，建立确定直杆所处地点和日期的数学模型。我们可以利用问题二中的方法，从影子的实际长度出发，对经度、纬度和日期进行遍历，即可得到若干最优解，附件二可能日期在 6 月 5 日或 7 月 9 日，地点在东经 79.75 度，北纬 41 度，在中国新疆省；而附件三的一个可能日期在 1 月 18 日或 11 月 25 日，地点在东经 110.75 度，北纬 32 度，在中国湖北省。

针对问题四，我们将平面倾斜的照片与现实建立联系，通过将影子分解为竖直方向与水平方向求解影子的长度，然后继续使用问题二的方法进行求解，在不知道日期的情况下，也可以通过问题三的方法进行求解。最后结果在东经 163.5 度，北纬 24 度。

关键字： 枚举法 微元法 直杆影对角 小孔成像 牛顿莱布尼兹公式

一、问题重述

确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面，太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化，确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

1、建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并用建立的模型画出2015年10月22日北京时间9:00-15:00之间天安门广场(北纬39度54分26秒,东经116度23分29秒)3米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

2、建立相应的数学模型，根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，确定直杆所处的地点。将建立的模型应用于附件1的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

3、建立相应的数学模型，根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，确定直杆所处的地点和日期。将建立的模型分别应用于附件2和附件3的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

4、建立确定视频拍摄地点的数学模型，根据附件4为一根直杆在太阳下的影子变化的视频，给出若干个可能的拍摄地点。已通过某种方式估计出该直杆的高度为2米。若拍摄日期未知，试根据视频确定出拍摄地点与日期。

二、问题假设

- 1、假设地球为规则的球体，半径为 $R=6371\text{km}$;
- 2、假设南纬为负，北纬为正，西经为负，东经为正;
- 3、假设地球公转的周期为365天，地球自转的周期为24小时;
- 4、假设题目中给出的所有数据都是准确的，忽略测量时出现的误差;
- 5、假设太阳为点光源，发出的光线为平行光线直射地球，忽略大气层折射对太阳光线的影响;
- 6、假设春分日为每年的3月21日，夏至日为每年的6月22日，秋分日为每年的9月23日，冬至日为每年的12月22日。

三、符号说明

符号	含义
R	地球半径, 6371km

α	测量地点的纬度 (南纬为负, 北纬为正)
γ	测量地点的经度 (西经为负, 东经为正)
β	太阳赤纬角
θ	太阳时角
φ	直杆影对角
h	太阳高度角
T	距离春分日的天数
TT	真太阳时
t	北京时间 (地方标准时)
δ	影子与正北方向的夹角
ζ	相邻时刻影子间的夹角
l	影子实际长度
m	直杆实际长度
b	视频中广场的长度
s	摄像机内摄像头到显示屏的距离
g	摄像头到地面的高度

四、问题分析

影子是物体在光线照射下, 在某个平面上形成的投影。由于地球每时每刻都在自转及围绕着太阳公转, 地球上的物体在太阳照射下形成的影子也在随着时间发生变化。太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化, 确定视频拍摄的地点和日期的一种方法, 现已应用于视频数据分析处理的实际操作中。

4.1 问题一分析

本题要求建立数学模型，求出物体的影长与各个参数之间的变化规律，并运用该模型求出某时刻天安门广场前，3m 长直杆的太阳影子长度的变化曲线。我们假设太阳光为一组平行光线。物体所在位置为点 A，A 点所在的经线与赤道的交点为点 D。某时刻在地球上的太阳直射点为点 B，B 点所在的经线与赤道的交点为点 C。以地球的球心为坐标原点，以 OD 的延长线为 X 轴，以与 OD 垂直的直线为 Y 轴，以与赤道平面垂直的直线为 Z 轴建立空间直角坐标系。我们可得到各个点的空间坐标： $A(R\cos\alpha, 0, R\sin\alpha)$ ， $B(R\cos\beta\cos\theta, R\cos\beta\sin\theta, R\sin\beta)$ ， $C(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ ， $D(R, 0, 0)$ 。

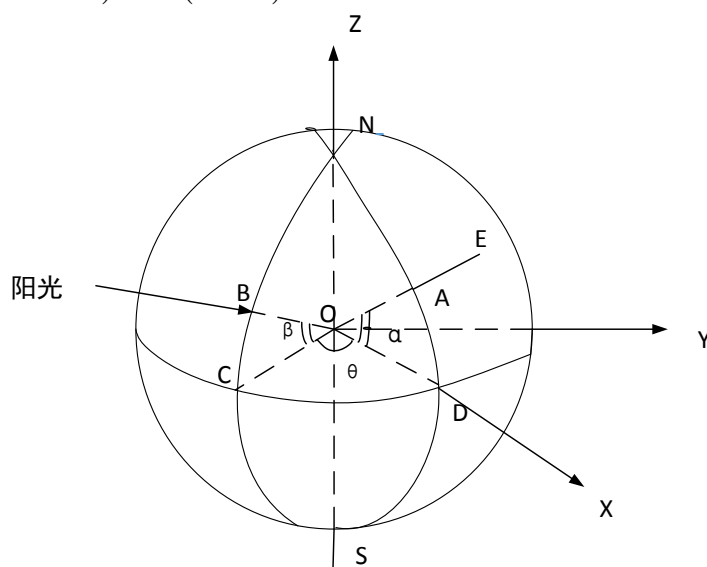


图 1 太阳光直射地球正面图 (1)

通过对包含点 A,B 的最大圆进行几何学分析，我们得到长度为 AE 的物体在太阳光的照射下，投影长度为 AF，则：

$$|AF| = |AE| \cdot \tan \varphi$$

并且此时可以得到：

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \beta \cos \theta + \sin \alpha \sin \beta$$

我们通过查阅相关文献及几何学分析，得到参数 α, β, θ 各自的变化规律，即得到投影长度 AF 与各个参数之间的关系。

当需画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线时，即当已知 $AE=3m$ ， $T=215$ ， $t \in [9, 15]$ ， $\alpha = 39^\circ 54' 26''$ ， $\gamma = 116^\circ 23' 29''$ 时，我们求出直杆的影子长度随着时间的变化规律，并运用 MATLAB 画图求得太阳影子长度 AF 的变化曲线。

4.2 问题二分析

本题要求建立确定直杆所处地点的模型。根据直杆的太阳影子长度随着时间变化的一组数据，找出直杆所在地点的合理位置。通过分析数据可知，在直杆的实际长度未知的情况下，我们需要从影子实际长度 l 和相邻时刻影子的夹角 ζ 两个方面考虑直杆所在地点。

一方面，我们从影子的实际长度 l 的角度出发。由于题目中只给出了影子的坐标数据，而直杆的实际长度未知，我们需要将实际问题转化为求影子长度的比值。通过对附件 1 的数据进行处理，得到 21 个不同时刻的影子实际长度 l_i ，再进一步求出 20 组影子实际长度的比值 l_i / l_{i+1} 。根据问题一，我们得到影长与直杆的实际长度的关系，即 $l = m \cdot \tan \varphi$ ，可以得出以下关系： $l_i / l_{i+1} = \tan \varphi_i / \tan \varphi_{i+1}$ 。再根据问题一中，直杆影对角 φ 与各参数 α, β, γ 之间的关系，我们对直杆所在地点的经度 γ ，纬度 α ，测量时间 t 进行穷举法遍历，通过建立的模型对每一组 (γ, α) 求解出 20 组 $l'_i / l'_{i+1} = \tan \varphi'_i / \tan \varphi'_{i+1}$ 的比值，在误差允许的范围内，找出实际值与理论值之间的最小方差，即得到若干最优解 (γ, α) 。此时已知测量数据时的日期为 2015 年 4 月 18 日，即在计算太阳赤纬角 β 时，取距离春分日的天数 $T=28$ 。

另一方面，我们从相邻时刻影子之间的夹角 ζ 的角度出发。分析数据我们知道，虽然题目中已建立直角坐标系，但并不知道 X 轴和 Y 轴的具体方位。因此，可以将问题转化为求相邻时刻的影子之间的夹角。我们求出 21 个不同时刻的影子与 Y 轴夹角 $\arctan(x_i / y_i)$ ，进一步求出 20 组相邻时刻的影子之间的夹角 $\zeta_i = \arctan(x_i / y_i) - \arctan(x_{i+1} / y_{i+1})$ 作为实际值。接着再引入影子与正北方向的夹角 δ 作为参数。我们运用几何学知识可以求出 δ 与各参数 α, β, φ 之间的函数关系。并且与上一模型类似，我们对直杆所在地点的经度 γ ，纬度 α ，测量时间 t 进行穷举法遍历，通过建立的模型对于每一组 (γ, α) 求解出 20 组 $\zeta'_i = \delta_i - \delta_{i+1}$ 作为模拟值，在误差允许的范围内求出实际值与理论值之间的最小方差，得到若干最优解。（其中 $i=1, 2, \dots, 20$ ）

通过综合以上两种方法求出的最优解，我们得到若干个附件 1 的固定直杆所在地点的最优解。

4.3 问题三分析

本题要求建立确定直杆所处的地点和日期模型。根据附件 2 和附件 3 直杆的太阳影子长度随着时间变化的数据，找出直杆所在地点和测量日期。把问题三与问题二相比较可以发现，问题三只比问题二多增加了一个参数变量，即距离春分日的天数 T 在问题三中是不定值。我们通过分析太阳直射点随着地球的自转和公转发生变化的规律，发现太阳直射点在南北回归线之间运动的轨迹符合简谐振动的运动规律。由于简谐振动具有高度的对称性，我们只考虑其中部分的运动轨迹。即只考虑从夏至日（6 月 22 日）到冬至日（12 月 22 日）之间，直杆的太阳影子

长度的变化情况。此时，距离春分日的天数 T 的范围为： $T \in [93, 276]$ 。

我们选择问题二中从影子实际长度的角度出发解决问题，用类似的方法对直杆所在地点的经度 γ ，纬度 α ，测量时间 t ，距离春分日的天数 T 进行穷举法遍历，在误差较小的前提下，得到固定直杆的若干个地点和日期的最优解 (γ, α, T) 。同时，我们通过运用问题二中从相邻时刻影子的夹角的角度，对于上述结果进行模型的检验和优化。

4.4 问题四分析

第四问在最基本的模型建立上与前三问类似，最主要的差别为我们需要将视频中的线段距离通过一定的关系式转化为现实中的实际距离。我们主要采用将照片中的点与实际中的点建立对应关系，我们画出照片中有关于前面的广场部分的图像和实际中广场的图像，其中实际中的点与照片中的点有一一对应的关系，主要的端点用 M 与 M' 表示对应关系。

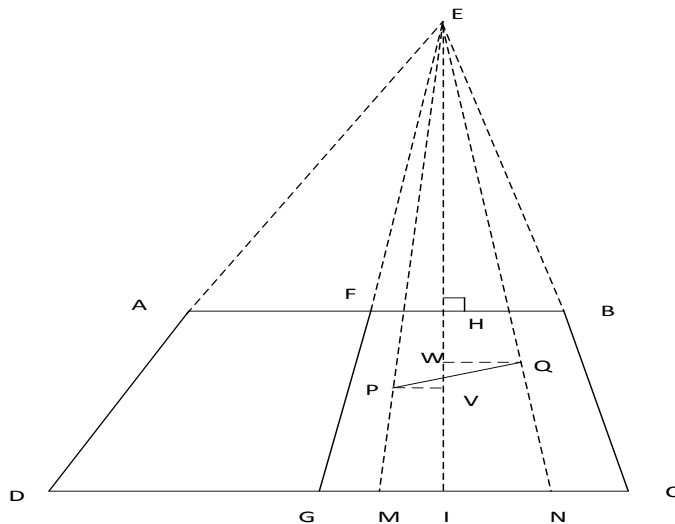


图 2 照片中广场的视图

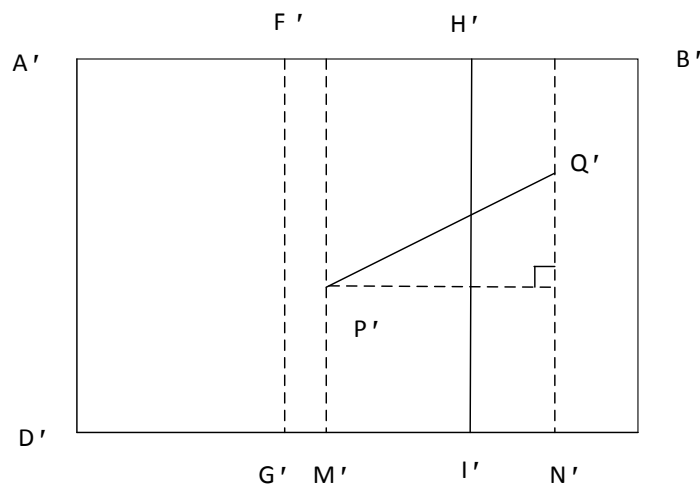


图 3 与图 2 相对应的实际中的广场俯视图

在实际广场的图像中平行于 A'D'的线段在图 1 中的对应线段的延长线均通过 E 点，且我们认为 A'D'与 B'C'是平行的。于是我们可以在照片上以两条边界分别为 x 轴和 y 轴建立一个直角坐标系，确定 ABCD 的坐标，并通过求解两条直线的交点解得 E 点坐标。

现假设 PQ 为第一张照片中影子的位置，则在实际的广场上，P'Q'为其确切位置，我们可以分别计算 P'与 Q'之间的竖直距离（即 Q'N'-P'M'）以及水平距离（即 M'N'）得到影子的实际长度。再利用问题二中的模型，在已知直杆的影子长度的情况下，求解出直杆所在的地点。若假设视频拍摄的日期未知，我们利用问题三中的模型可以求解出直杆所在地点以及拍摄日期。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型

5.1.1 物体影子长度变化模型的建立

地球的运动是自转和公转两种运动的叠加。地球在围绕着地轴自转的同时，还在围绕着太阳公转。由于黄赤交角（地球公转轨道面与赤道面的夹角，约为 $23^{\circ}26'$ ）的存在，地球公转到达不同位置，其太阳直射点的纬度不同。因此，在一个回归年（地球公转的一个周期）期间，太阳有时直射北半球，有时直射南半球，有时直射在赤道上。半年在北半球，半年在南半球，半年向北移动，半年向南移动。太阳直射到最北范围是北纬 $23^{\circ}26'21''$ ，最南范围是南纬 $23^{\circ}26'21''$ 。春分秋分日太阳直射赤道，夏至日太阳直射到北回归线上，冬至日太阳直射到南回归线上。太阳直射点在赤道南北这种有规律的周期性往返运动称为太阳直射点的回归运动^[1]。

正是由于地球自转和公转的存在，才出现地球上物体太阳影子长度的不断变化的情况。见图 1 中，点 A 是测量物体所在地点，AE 为该物体的长度。 α 为点 A 的纬度， γ 为点 A 的经度。我们假定南纬为负，北纬为正，西经为负，东经为正。点 D 为 A 点所在经线与赤道圈的交点。点 B 为太阳直射点。 β 为太阳赤纬角，即地球赤道平面与太阳和地球之间连线的夹角，其大小等于 B 点的纬度。点 C 为 B 点所在经线与赤道圈的交点。以球心 O 为原点，OD 所在延长线为 X 轴，与 OD 垂直的直线为 Y 轴，过 O 点且与赤道平面垂直的直线为 Z 轴，建立空间直角坐标系。此时， $\angle AOD = \alpha$ ， $\angle BOC = \beta$ ， $\angle COD = \theta$ ， $\angle AOB = \varphi$ 。得到各点的坐标为：

$$A(R \cos \alpha, 0, R \sin \alpha) \quad B(R \cos \beta \cos \theta, R \cos \beta \sin \theta, R \sin \beta)$$

$$C(R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \quad D(R, 0, 0)$$

如下图，我们画出包含测量点 A 和太阳直射点 B 的最大圆。在直杆与影子

以及太阳光线构成的直角三角形中， h 为太阳高度角，即太阳的入射光线与地平面之间的夹角。 φ 为直杆影对角，即固定直杆的影子所对的角。由图可知，太阳高度角 h 与直杆影对角 φ 互为补角。

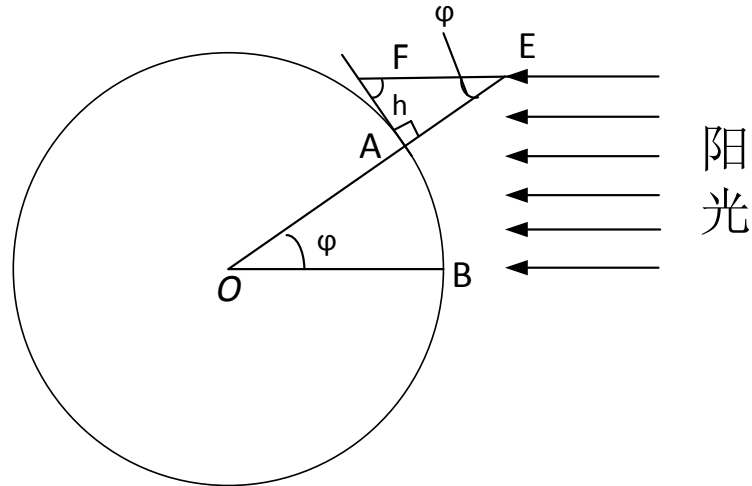


图 4 包含 A, B 的最大圆切面图

由图我们得到物体的太阳影子的长度 $|AF|$ 的变化规律为:

$$|AF| = |AE| \cdot \tan \varphi \quad (4)$$

其中，直杆影对角 φ 满足:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{R \cos \alpha \cdot R \cos \beta \cos \theta + R \sin \alpha \cdot R \sin \beta}{R \cdot R} \\ &= \cos \alpha \cos \beta \cos \theta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (2)$$

由于在一个回归年期间，太阳直射点 B 在赤道及南北回归线内做有规律的往返运动。春分日，太阳直射赤道，之后太阳直射点向北移动，在夏至日到达北回归线(北纬 $23^{\circ}26'21''$)，这之后直射点向南移动，在秋分日第二次到达赤道，之后继续向南移动，在冬至日达到南回归线(南纬 $23^{\circ}26'21''$)，之后接着向北移动，在第二年春分日第三次达到赤道。由此，我们可以看出在一个回归年里，太阳直射点 B 的运动可以看作简谐振动。则太阳赤纬角 β 满足:

$$\beta = y = A \sin(\omega T + \phi) \quad (3)$$

其中， $A=23^{\circ}26'21''$ ， $\omega = \frac{2\pi}{365}$ ，T 为距离春分日的天数，初相位 $\phi = 0$ 。

角 θ 表示太阳时角。单位时间地球自转的角度定义为时角 θ 。地球自转一周为 360 度，周期为 24 小时，即每小时转过的角度为 15 度^[2]。并且当太阳光直射在某条经线上时，该条经线上的时间为正午 12 时。则有：

$$\theta = 15 \times (TT - 12) \quad (4)$$

TT 为太阳真时，太阳真时=地方标准时+时差+经度订正^[3]，即：

$$TT = t - 8 + \gamma \times 4 \div 60 = t - 8 + \frac{\gamma}{15} \quad (5)$$

t 为北京时间，即东八区的区时。全球共 24 个时区，每相邻两个时区的时间相差一小时，东边的时间比西边早，则东八区与零时区的时差为 8 小时。如果地方子午圈在标准子午圈的东边，经度订正为正，反之为负^[3]。

我们将式 (2) (3) (4) (5) 带入式 (1) 中，得到物体的太阳影子长度的大小关于各个参数 α, β, θ 的变化情况。

5.1.2 物体影子长度变化模型的求解

应用建立的模型，画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。即当已知 $AE=3m$ ， $T=215$ ， $t \in [9, 15]$ ， $\alpha = 39^\circ 54' 26''$ 时，我们运用 MATLAB 画图求得直杆的太阳影子长度 AF 的变化曲线。如下图所示：

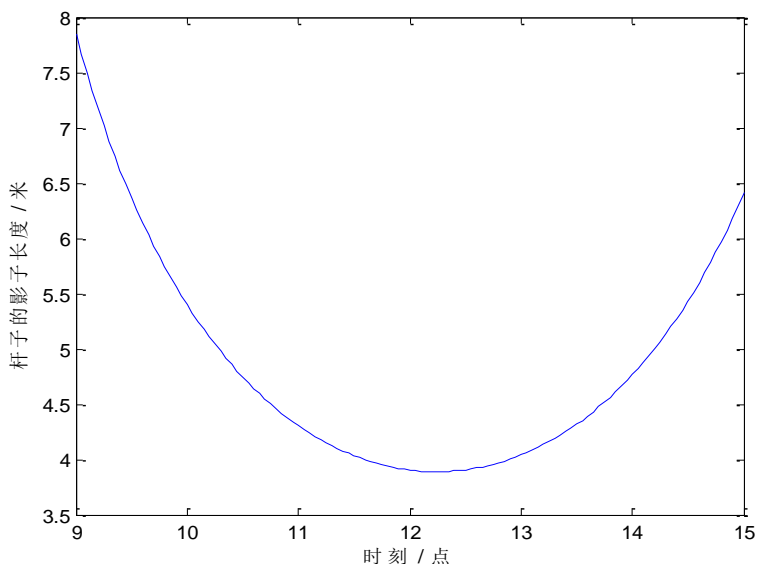


图 5 直杆太阳影长随时间的变化曲线

如上图，2015 年 10 月 22 日正处于我国的秋季，太阳直射点越过赤道向南移动，并将在 12 月 22 日左右到达南回归线。此时在北京时间 9:00-15:00 之间，天安门广场上 3 米高的直杆的影子长度在上午 9 点时最长，随后逐渐减小，在中午 12 点 20 分左右到达最短，这之后逐渐变长。图像呈不对称分布。这符合我国

秋冬季节在中午 12 点至 13 点之间到达正午的实际情况。

5.2 问题二模型

5.2.1 确定直杆所在地点模型的建立

通过观察附件 1 的数据, 我们知道题目中虽然建立了直角坐标系并给出了一小时内 21 组直杆影子的末端坐标, 但由于直杆的实际长度和直角坐标系的具体方位并未给出, 于是我们从以下两个方面求解出附件 1 中直杆的可能所在的位置。

5.2.1.1 根据影子的实际长度确定直杆所在地点

观察附件 1 中的数据, 2015 年 4 月 18 日北京时间下午 14 点 42 分到 15 点 42 分的某地, 在水平地面上建立直角坐标系 XOY, 每隔三分钟测量一次固定直杆的影子长度的坐标数据, 得到 21 个在不同时刻下记录的影子长度坐标 (x_i, y_i) 。则每组数据的实际影子长度为:

$$l_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad (6)$$

利用这 21 个实际的影子长度, 得到 20 组影子实际长度的比值 l_i / l_{i+1} 。

而另一方面, 我们利用问题一中直杆的太阳影子长度的变化情况得到影子长度与直杆影对角的关系:

$$l_i = m \cdot \tan \varphi_i \quad (7)$$

当固定直杆的实际长度 m 一定的前提下, 此时影子长度的比值为:

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} = \frac{\tan \varphi_i}{\tan \varphi_{i+1}} \quad (8)$$

利用问题一中直杆影对角 φ_i 的求解方法, 我们得到 φ_i 与参数 $\alpha, \gamma, \beta, t, T$ 之间的函数关系:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \cos \alpha \cos \beta \cos \theta + \sin \alpha \sin \beta \\ \beta = A \sin \frac{2\pi}{365} T \\ \theta = 15 \times \left(t - 20 + \frac{\gamma}{15} \right) \end{cases} \quad (9)$$

我们用 MATLAB 软件编程实现, 对于参数 α, γ, t 进行穷举法遍历, 经度 $\gamma \in [-180, 180]$, 纬度 $\alpha \in [-90, 90]$, 北京时间 $t \in [14.7, 15.7]$ 。其中, 经度和纬度的步长为 1° , 时间 t 的步长为 0.05 小时, 并且距离春分日的天数 $T=28$ 。此时, 对于每一组 $[\gamma, \alpha, t]$, 我们都可以求得 21 个直杆影对角 φ 的数值, 即求得 20 组影子长度的理论值之比:

$$\frac{l'_i}{l'_{i+1}} = \frac{\tan \phi'_i}{\tan \phi'_{i+1}} \quad (10)$$

我们对于每一组 $[\gamma, \alpha, t]$ ，都将式(10)中模型的理论值与式(8)中实际值求解方差。最后，在一定的误差允许的范围内，寻找满足最小方差条件的最优解。

5.2.1.2 根据相邻时刻影子之间的夹角确定直杆所在地点

我们考虑将问题转化为求解相邻时刻的影子之间的夹角 ζ 。画出*i*时刻和*i+1*时刻影子之间的夹角 ζ 的示意图。

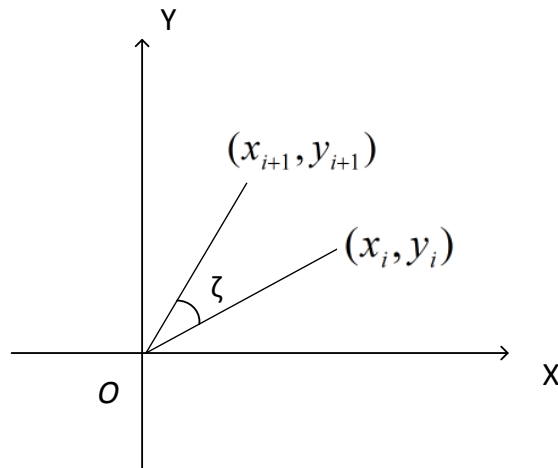


图 6 相邻时刻影子之间的夹角示意图

根据附件 1 中的数据，我们可以得到 21 个影子与 Y 轴的夹角，接着逐个相减，得到 20 组相邻时刻的影子之间实际的夹角，计算公式如下：

$$\zeta_i = \arctan\left(\frac{x_i}{y_i}\right) - \arctan\left(\frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}\right) \quad (11)$$

当运用相邻时刻的影子之间的夹角求解固定直杆所在地点时，我们首先要引入一个参数，即影子与正北方向的夹角 δ 。由于题目中没有给出直角坐标系中坐标轴的具体方位，我们无法根据坐标系中的数据进行直接计算。因此引入参数 δ 对于模型的建立十分必要。

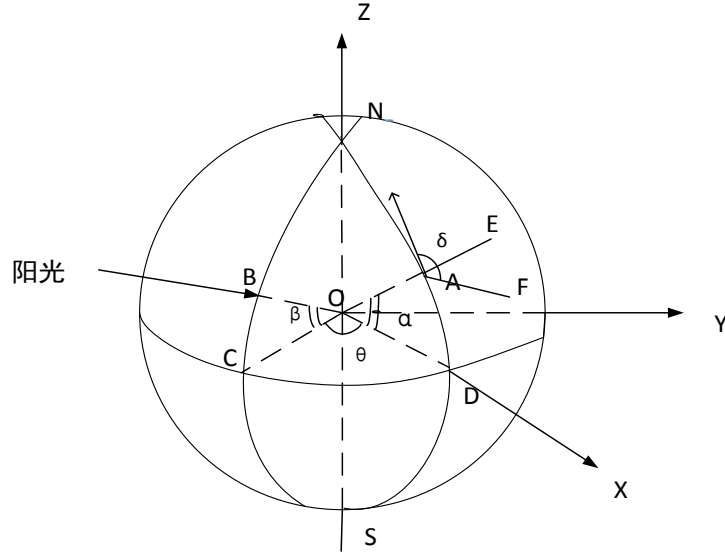


图 7 太阳光直射地球正面图 (2)

如图 5, AE 为固定直杆, 长度为 m 。AF 为直杆的影子, AF 与正北方向的夹角为 δ 。同问题一, 我们写出各个点的空间坐标: $A(R \cos \alpha, 0, R \sin \alpha)$, $D(R, 0, 0)$, $B(R \cos \beta \cos \theta, R \cos \beta \sin \theta, R \sin \beta)$, $C(R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$, $E((R+m) \cos \alpha, 0, (R+m) \sin \alpha)$, 并设点 F 的坐标为 (x, y, z) 。我们观察图 2 可以发现, 在直杆 AE 与影子 AF 以及太阳光线 EF 构成的直角三角形中, $AE \perp AF$ 。并且由于太阳发出的光线为平行光线, 则 $OB \parallel EF$ 。由以上的几何关系, 我们得到:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \\ \overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{OB} \end{cases} \quad (12)$$

我们将式 (11) 化简得到:

$$\begin{cases} x = \lambda R \cos \beta \cos \theta + (R+m) \cos \alpha & [1] \\ y = \lambda R \cos \beta \sin \theta & [2] \\ z = \lambda R \sin \beta + (R+m) \sin \alpha & [3] \\ \cos \alpha (x - R \cos \alpha) + \sin \alpha (z - R \sin \alpha) = 0 & [4] \end{cases} \quad (13)$$

再将式 (12) 中的 [1] [2] [3] 带入 [4], 化简后得到:

$$\lambda R = -\frac{m}{\cos \varphi} \quad (14)$$

因为角 δ 为 AF 与正北方向的夹角, 设正北方向的单位向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ 。则求出角 δ 的余弦如下, 并带入式 (13) 化简。

$$\cos \delta = \cos \langle \overrightarrow{AF}, \vec{n} \rangle = \frac{\sin \alpha \cos \varphi - \sin \beta}{\sin \varphi} \quad (15)$$

由此, 我们得到角 δ 与各个参数 α, φ, β 之间的函数关系式。而太阳影对角 φ_i 与

参数 $\alpha, \gamma, \beta, t, T$ 之间的函数关系由式 (9) 进行说明, 由此, 影子与正北方向的夹角 δ 与参数 α, φ, β 之间的关系, 就转化为角 δ 与参数 $\alpha, \gamma, \beta, t, T$ 之间的关系。利用我们建立的模型, 可得到相邻时刻的影子之间理论夹角为:

$$\zeta'_i = \delta_i - \delta_{i+1} \quad (16)$$

与上一种方法的处理方式类似, 我们用 MATLAB 软件编程实现, 对于参数 α, γ, t 进行穷举法遍历, 经度 $\gamma \in [-180, 180]$, 纬度 $\alpha \in [-90, 90]$, 北京时间 $t \in [14.7, 15.7]$ 。经度和纬度的步长为 1° , 时间 t 的步长为 0.05 小时, 并且距离春分日的天数 $T=28$ 。此时, 对于每一组 $[\gamma, \alpha, t]$, 可以得到 20 组相邻时刻的影子之间理论的夹角 ζ' 。我们将式 (16) 中的 20 组理论值与式 (11) 中的精确值在一定的范围内求出最小方差, 满足上述条件的经纬度 $[\gamma, \alpha]$ 即为直杆可能所在的地点。

根据模型 5.2.1.1 与模型 5.2.1.2, 我们得到若干个直杆的位置的可能点。将两组结果对比, 取其交集, 就得出了直杆所在地点的最终结果。

5.2.2 确定直杆所在地点模型的求解

根据 MATLAB 编程求解出的模型 5.2.1.1 结果如下:

表 1 对于影子长度匹配模型求出直杆坐标结果

纬度/度	经度/度	具体位置
-3.00	102.50	印度尼西亚
21.00	106.50	越南
20.00	107.50	北部湾
20.00	108.50	北部湾
19.00	109.50	中国海南
18.00	110.50	南海西部

根据 MATLAB 编程求解出的模型 5.2.1.2 结果如下:

表 2 对于影子角度匹配模型求出直杆坐标结果

纬度/度	经度/度	具体位置
19.00	109.50	中国海南
20.00	111.50	南海西部
-9.00	118.50	印度尼西亚
-10.00	119.50	印度尼西亚
-11.00	120.50	印度尼西亚

如以上两表所示，我们从影子的长度和角度两个方面出发，建立模型求出附件 1 中的直杆可能所在的地点。从两表中看出，直杆所在的位置主要集中在海南和印度尼西亚附近，用两种方法求出的结果较为相近，说明模型建立的准确性。并且，在海南附近的点的误差更小，结果更加精确。

5.3 问题三模型

5.3.1 确定直杆所处地点和日期模型的建立

我们将问题二与问题三对比，可以看出问题三在问题二模型的基础上，增加了日期的参数变量。直杆的影子长度测量时的日期未知，直接影响到模型二中距离春分日的天数 T 的变化。参数 T 从模型二中的定值转化为问题三中的不定值。由模型一可知，参数 T 的变化实际上引起了太阳赤纬角 β 的改变，而太阳赤纬角的大小又与太阳直射点的运动相关，因此，我们通过分析太阳直射点的移动规律，找出参数 T 的变化过程。太阳直射点在一个回归年里的移动轨迹如下图所示：

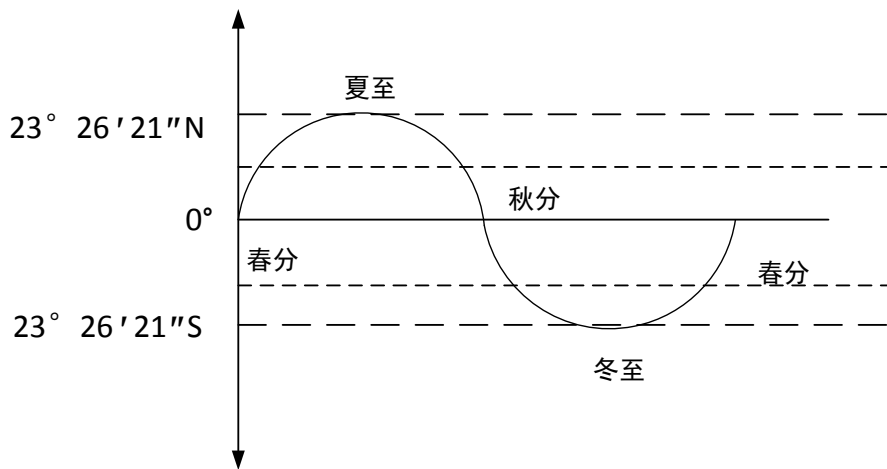


图 8 太阳直射点的移动轨迹图

由于太阳直射点受到地球自转和公转的影响，在北回归线(北纬 $23^{\circ}26'21''$)，赤道及南回归线(南纬 $23^{\circ}26'21''$)之间做往返运动，其运动规律符合简谐振动的特点。考虑到简谐振动具有高度的对称性，我们只选取其中的夏至日(6月22日)到冬至日(12月22日)的部分，作为遍历的对象，即参数距离春分日的天数 T 的范围为： $T \in [93, 276]$ 。

我们选择用与 5.2.1.1 根据影子的实际长度确定直杆所在地点相类似的模型求解本题。具体的步骤不再一一赘述。同样用 MATLAB 软件编程实现，对于参数 α, γ, t, T 进行穷举法遍历，经度 $\gamma \in [-180, 180]$ ，纬度 $\alpha \in [-90, 90]$ ，北京时间 $t \in [14.7, 15.7]$ ，距离春分日的天数 $T \in [93, 276]$ 。其中，经度和纬度的步长为 1° ，时间 t 的步长为 0.05 小时，距离春分日的天数 T 的步长为 1 天。此时，对于每一组 $[\gamma, \alpha, t, T]$ ，我们都可以求得 21 个直杆影对角 φ 的数值，即求得 20 组影子长度的理论值之比。在一定误差允许的范围内，求出附件 2 和 3 中若干个直杆可能的所在地。

值得一提的是，从图 6 中可以清楚的看到，当我们求得在夏至到冬至中的某天直杆的影子长度符合附件中的数据变化规律时，在同纬度地区存在着与之对应的某天，同样满足以上数据，即在同一纬度地区存在着两组解。

5.3.2 确定直杆所处地点和日期模型的求解

根据附件 2 中的数据由 MATLAB 编程求解出的模型 5.3.1 结果如下：

表 3 对于影子长度匹配模型求出附件 2 直杆坐标及日期结果

纬度/度	经度/度	具体位置	T 值/天	日期
41.00	79.75	中国新疆	110	7月9日 6月5日
39.00	79.75	中国新疆	125	7月24日 5月21日
-39.00	79.75	印度洋	240	11月16日 1月27日
-41.00	79.75	印度洋	255	12月1日 1月13日

根据附件 3 中的数据由 MATLAB 编程求解出的模型 5.3.1 结果如下：

表 4 对于影子长度匹配模型求出附件 3 直杆坐标及日期结果

纬度/度	经度/度	具体位置	T 值/天	日期
-32.00	110.75	印度洋	115	7 月 14 日 5 月 31 日
-32.00	110.75	印度洋	116	7 月 15 日 5 月 30 日
32.00	110.75	中国湖北西北部	249	11 月 25 日 1 月 18 日
32.00	110.75	中国湖北西北部	250	11 月 26 日 1 月 17 日

根据表 3 和 4 我们得到，附件 2 中的数据最可能的测量地点为中国新疆，测量日期可能为 5 月 21 日，6 月 5 日，7 月 9 日或 7 月 24 日。附件 3 中的数据最可能的测量地点为中国湖北的西北部，测量日期可能为 1 月 17 日，1 月 18 日，11 月 25 日或 11 月 26 日。

5. 4 问题四模型

5. 4. 1 确定视频拍摄地点模型的建立

对于水平方向，由于 DC 与 D'C' 为同一条直线，且其没有进行任何偏转，我们认为 DC 与 D'C' 上对应线段长度成比例，即：

$$\frac{|MN'|}{|MN|} = \frac{|D'C'|}{|DC|} = \frac{b}{|DC|} \quad (17)$$

对于线段 MN，有 MN=MI+IN，且在直角三角形 EIM 与 EIN 中，分别有：

$$\frac{|MI|}{|PV|} = \frac{|EI|}{|EV|} \quad (18)$$

$$\frac{|IN|}{|QW|} = \frac{|EI|}{|EW|} \quad (19)$$

则可以得到影子长度在水平方向上分量的值，其与广场长 b 成正比，系数记为 c_{11} 。

对于竖直方向，可以知道，在直线 HI 上，当其与底端距离为 x 时，将照片中的点向上移动微元 dx 时，设在右图中，移动长度为 dy。则由照相机、摄像机的成像原理，在 HI 所在直线上时，成像原理如下图所示：

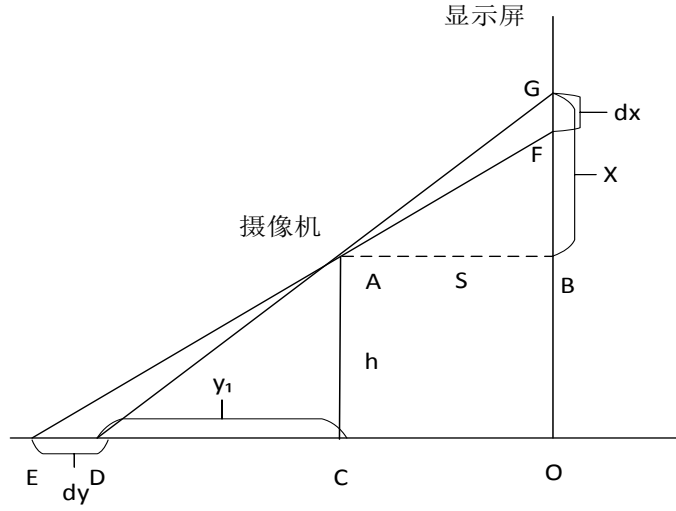


图9 摄像机的小孔成像图

以O点为坐标原点，地面方向为x轴方向，CA为摄像机所在位置，设相机架设高度（即AC）长度为h，摄像机内部，摄像头与屏幕距离为s。则有：O(0, 0); B(0, h); C(-s, 0); A(-s, h)，则对于G点，其坐标为(0, h+x)，可以得到

$$\frac{x}{s} = \frac{h}{y_1} \quad (20)$$

同理可以得到

$$\frac{x-dx}{s} = \frac{h}{y_2} \quad (21)$$

则有：

$$dy = y_2 - y_1 = hs \left(\frac{1}{x-dx} - \frac{1}{x} \right) = \frac{hs}{x^2} dx \quad (22)$$

则P'Q'在竖直方向上的长度即是如下积分：

$$y = \int_{y_{p'}}^{y_{q'}} dy = \int_{y_p}^{y_q} \frac{hs}{x^2} dx \quad (23)$$

可以得到影子长度在竖直方向上分量的值，其与相机架设高度及相机内部摄像头与屏幕距离的乘积成正比，系数记为 c_{12} 。

即：

$$l^2 = c_{11}^2 x_1^2 + c_{12}^2 x_2^2 \quad (24)$$

其中 x_1 表示b， x_2 表示 $h*s$ 。则对于第i张照片，有

$$l_i^2 = c_{i1}^2 x_1^2 + c_{i2}^2 x_2^2 \quad (25)$$

我们现在需要将参数 x_1 与 x_2 消去，我们考虑连续的三个等式，即 $i, i+1, i+2$ 三个等式，使用前两个等式求解出 x_1, x_2 ，在代入第三个式子得到等式，如下：

$$l_{i+2}^2 \cdot \begin{vmatrix} c_{i1}^2 & c_{i2}^2 \\ c_{i+1,1}^2 & c_{i+1,2}^2 \end{vmatrix} - c_{i+2,1}^2 \cdot \begin{vmatrix} l_i^2 & c_{i2}^2 \\ l_{i+1}^2 & c_{i+1,2}^2 \end{vmatrix} - c_{i+2,2}^2 \cdot \begin{vmatrix} c_{i1}^2 & l_i^2 \\ c_{i+1,1}^2 & l_{i+1}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

即每三条影子得到的参数确定一个等式。

现在我们对经纬度的所有可能的取值进行遍历，即对于每一个取值，我们已知，待测点的经度，纬度，日期，时辰以及竿的高度，可以得到每一时刻的影子的确切长度，共计 21 个影子长度，将之分为 19 组，第一组为第 1,2,3 条影子，第二组为第 2,3,4 条影子，以此类推。并将之代入式 (26)，可以得到一个误差。即对于每一组数据（待测点的经纬度）都对应着 19 个误差，我们对这 19 个误差的绝对值求和，可以得到一个总的误差。我们找到一组经纬度的数据，使得该总误差最小，即待测点的经纬度。

5.4.2 确定视频拍摄地点模型的求解

表 5 视频拍摄地点及日期求解结果

纬度/度	经度/度	具体位置	T 值/天	日期
26.00	163.50	太平洋	94	6 月 21 日 6 月 23 日
-26.00	163.50	太平洋	273	12 月 19 日 12 月 25 日

5.4.3 地点在海洋里的原因猜想

由于本题计算影子长度的时候，采取的是直接在图上使用工具选取点的坐标进行计算的，所以会存在很大的观测误差。以及照片中的影子等所对应线不是直线，而我们在模型计算的时候均是以直线来计算的，也会导致较大的误差。

六、模型检验

由题，问题二中要求根据附件 1 中的数据建立确定直杆所在地点的模型，此时我们已知测量数据的日期。问题三中要求根据附件 2,3 中的数据建立确定直杆所在地点和日期的模型，此时测量数据的日期未知。通过第五部分-模型的建立与求解中的建模过程，我们知道问题二，三的解决方案是自成一体的，在结合了问题一模型的基础上，形成了完整的建模体系。

我们对该模型体系进行检验，我们假设附件 1 中的数据测量日期未知，运用问题三模型反解出附件 1 数据的测量地点及时间，与已知日期相比，用来检验

模型建立的准确程度。

表 5 对于影子长度匹配模型求出附件 1 直杆坐标和日期结果

纬度/度	经度/度	具体位置	T 值/天	日期
12.00	109.50	南海	125	7 月 24 日 5 月 20 日
19.00	108.50	北部湾	157	8 月 25 日 4 月 18 日
-19.00	108.50	印度洋	208	10 月 15 日 2 月 28 日
-12.00	109.50	印度洋	240	11 月 16 日 1 月 27 日

根据附件 1 中给出的测量日期为 2015 年 4 月 18 日,并且在表 1 中得到测量地点的结果为东经 108.5° , 北纬 20° 。这与表 5 中利用模型三求出的第二行带有底纹的数据几乎一致。这说明了我们的模型建立的准确性。

七、模型评价

优点:

- 1、建立模型的过程中,没有用到复杂的算法或程序,依靠物理学和几何学知识,结合 MATLAB 编程,建立数学模型解决问题;
- 2、问题一,二,三中建立的数学模型关系紧密,环环相扣,自成一体,构成了太阳影子定位技术的重要组成部分;
- 3、问题四中通过复杂的几何学作图分析,建立了根据视频中直杆的太阳影子变化过程确定拍摄地点和日期的数学模型。
- 4、问题四中不仅仅的使用照片上的距离来代替实际中影子的长度,而是将二维图片上的影子长度转化为三维立体,从而得到其实际的长度。

缺点:

- 1、问题四中根据作图分析建立了数学模型。但由于从视频截图中测量数据的方法误差较大,最后得到的结果也存在误差;
- 2、问题二,三中我们运用枚举法遍历得到的数据精度相对较低。经纬度的最小单位为 1 度。我们将在模型的改进和推广中运用遗传算法确定局部最优解,以达到增加精度的目的。

八、模型的改进与推广

在第二问中,我们采取枚举法对观测点的经纬度进行遍历,得到若干最优解,但这些最优解都为整数数据,无法得到一些更精确的结果,因此我们思考使用遗传算法对现有算法进行改进。

我们首先使用原算法得到一些整数解,而后对于每个整数解,考虑其范围为纬度 $\pm 1^\circ$,和经度 $\pm 1^\circ$ 的区域。使用遗传算法继续寻找局部最优解,从而我们得到更精确的结果^[4]。例如对附件1中的数据,初值为东经 109.5° ,北纬 19° 时,经过遗传算法求解,最终得到结果如下:东经 108.8047° ,北纬 19.3906° 。

九、参考文献

- [1]蒋洪力,太阳直射点纬度的数学推导和分析[J],数学通报,46(9):39-40,2007。
[2]太阳时角百度百科,2015年9月12日,16:45。
http://baike.baidu.com/link?url=7AcxV4d4kG2fnMMvr3qgD6BTVHhEetjcv_j7s34ibfb4eq3OwJtmXo4SIFiCCdNWQTnRiCy5ZksvF_261b_OW
[3]张文华等,太阳影子倍率的计算方法及其对光伏阵列布局的影响[J],太阳能技术与产品,9:28-31,2011。
[4]雷英杰,MATLAB遗传算法工具箱与应用,西安,西安电子科技大学出版社,2005。

十、附录

10.1 求解第一问

```
%% 数据清除
clear
%% 数据
h=3; % 杆子的高度
t=9:0.05:15; % 时间
a=39.9072; % 所求点的纬度
day=215; % 与春分（3月21日）相差的天数
b=23.4392*sin(2*pi/365*day); % 所求日期所对应的太阳直射的纬度
c=15*(t-8+116.3914/15-12); % 太阳时角
zh=cosd(a).*cosd(b).*cosd(c)+sind(a).*sind(b);
fi=acosd(zh); % 直杆影对角
changdu=h*tand(fi); % 所求影子长度
plot(t,changdu) % 画图
xlabel('时刻 / 点');
ylabel('杆子的影子长度 / 米');
disp('每一时刻所对应的杆子影子的长度 / (时刻, 影长)')
jg=[t',changdu'],
```

10.2 影子长度匹配模型求解

```
%% 对于影子长度匹配模型所求经纬度
%% 数据清除
clear
%% 数据
data=xlsread('附件 1-3',1);
cd=sqrt(data(:,2).^2+data(:,3).^2);
tc=14.7; % 起始时间
tz=15.7; % 终止时间
td=0.05; % 时间间隔
cd1=cd(2:21)./cd(1:20);
day=28; % 与春分（3月21日）相差的天数
b=23.4392*sin(2*pi/365*day); % 所求日期时太阳直射的纬度
t=tc:td:tz; % 时间
tj1=30-15*(tc-12);
tj2=210-15*(tz-12);
tw=tj1:tj2; % 经度适应范围
qw=zeros(181,166);
```

```

%% 找经纬度
for a=-90:90      %所求点的纬度
    for w=1:166   %所求点的经度
        c=15*(t-8+tw(w)/15-12);
        zh=cosd(a).*cosd(b).*cosd(c)+sind(a).*sind(b);
        fi=acos(zh);      %直杆影对角
        changdu=tan(fi);  %所求影子长度
        cd2=changdu(2:21)./changdu(1:20);          %长度比
        qw(a+91,w)=sum((cd1-cd2).^2);             %长度比求和
    end
end
[aaa bbb]=find(qw<8*10^-7);
disp('对于影子长度匹配模型所求经纬度/(纬度, 经度)')
jieg=[aaa-91,tw(bbb)]

```

10.3 影子角度匹配模型求解

```

%% 对于影子角度匹配模型所求经纬度
%% 数据清除
clear
%% 数据
data=xlsread('附件 1-3',1);
jd=atand(data(:,2)./data(:,3));
jd1=abs(jd(2:21)-jd(1:20)); %初始数据影子的角度差
tc=14.7; %起始时间
tz=15.7; %终止时间
td=0.05; %时间间隔
day=28; %与春分(3月21日)相差的天数
b=23.4392*sin(2*pi/365*day); %所求日期时太阳直射的纬度
t=tc:td:tz; %时间
tj1=30-15*(tc-12);
tj2=210-15*(tz-12);
tw=tj1:tj2; %经度适应范围

%% 找经纬度
for a=-90:90      %所求点的纬度
    for w=1:166
        c=15*(t-8+tw(w)/15-12); %太阳时角
        zh=cosd(a).*cosd(b).*cosd(c)+sind(a).*sind(b);
        fi=acosd(zh);      %直杆影对角
        changdu=tand(fi);
        jd2=acosd((sind(a).*cosd(fi)-sind(b))./sind(fi));
        jd21=abs(jd2(2:21)-jd2(1:20)); %角度差
        jd3=abs(jd1-jd21);
        qw(a+91,w)=sum((jd3).^2); %角度差值求和
    end
end

```

```

    end
end
[aaa bbb]=find(qw<10*10^-4);
disp('对于影子角度匹配模型所求经纬度/(纬度, 经度)')
jieg1=[aaa-91,tw(bbb)]

```

10.4 第三问求解，且通过代入第二问数据可验证模型的准确性

```

function t2015a_3(tc,tz,td,fo)
% 附件一输入: clear; tc=14.7;    tz=15.7;    td=0.05; fo=1; t2015a_3(tc,tz,td,fo)
% 附件二输入: clear; tc=12+41/60;tz=13+41/60;td=0.05; fo=2; t2015a_3(tc,tz,td,fo)
% 附件三输入: clear; tc=13.15;    tz=14.15;    td=0.05; fo=3; t2015a_3(tc,tz,td,fo)

% tc 起始时间
% tz 终止时间
% td 时间间隔
% fo 附件提取
%% 对于影子长度匹配模型所求经纬度

%% 数据
tic
data=xlsread('附件 1-3',fo);
cd=sqrt(data(:,2).^2+data(:,3).^2); %所求数据影子长度
cd1=cd(2:21)./cd(1:20);           %影子长度比
%tc 起始时间
%tz 终止时间
%td 时间间隔
t=tc:td:tz; % 时间
%% 筛选经度
tj1=30-15*(tc-12);
tj2=210-15*(tz-12);
tw=tj1:tj2;
ta=find(tw>180);
tw(ta)=tw(ta)-360; %经度适应范围
qw=zeros(181,166,184);
%% 找经纬度和日期
for day=93:276 %距离春分(3月21日)的天数
    b=23.4392*sin(2*pi/365*day); %所求日期时太阳直射的纬度
for a=-90:90 %所求点的纬度
    for w=1:166
        c=15*(t-8+tw(w)/15-12); %太阳时角
        zh=cosd(a).*cosd(b).*cosd(c)+sind(a).*sind(b);
        fi=acos(zh);
    end
end
end

```

```

changdu=tan(fi);
cd2=changdu(2:21)./changdu(1:20); %影子长度比
qw(a+91,w,day-92)=sum((cd1-cd2).^2);
    end
end
end
switch fo
    case 1
        nw=4*10^-8;
    case 2
        nw=7*10^-8;
    case 3
        nw=1.8*10^-8;
end
[aaa bbb]=find(qw<nw);aa=aaa-91;bb=tw(mod(bbb,166));cc=ceil(bbb/166)+92;
toc
disp('对于影子长度匹配模型所求经纬度/(纬度， 经度， 日期(距离 3 月 21 日的天数))')
jieg=[aa,bb',cc]

```

10.5 截取视频

%% 将视频截取出图片（每隔 3000 帧截一张）每两分钟截一张。

```

clear
data=VideoReader('附件.avi'); % 视频所在路径
N=data.NumberOfFrames; % 帧数
for i=1:3000:N
    figure
    frame = read(data,i);
    imshow(frame); %显示帧
    imwrite(frame,strcat(num2str(i),'.jpg'),'jpg');% 保存帧
end

```

10.6 求解第四问（有日期）

```

%% 清除数据
clear
%% 建立图像与真实长度的关系（数据分析）
tic
syms y
x=-495/115*(y-685)+498;

```



```

y0=floor(vpa(solve((y-697)/78==(x-1730)/(1919-1730),y)));
x0=floor(vpa(subs(x,y,y0)));          % x0,y0 为图像交点处坐标
dc=(1730-498)*(1080-y0)/(y0-692);
shuj=[876 1678 1667 1655 1648 1641 1624 1618 1610 1601 1587 1583 1576 1569 1554 1542
1537 1524 1518 1512 1499 1493
      883 863 867 869 869 870 872 873 874 874 876 877 879 879 880 881 881 882 883 883 885
885];
% shuj 为在之前从视频上每隔 2 分钟截得的 21 张图中的影子端点的坐标，其中左端点相
同...
% 第 1 列为左端点，第 2 到第 22 列为右端点。
hf=zeros(2,21);
clear x
syms x
for i=1:21
    mn=(x0-shuj(1,1))*(1080-y0)/(shuj(2,1)-y0)+(x0-shuj(1,i+1))*(1080-y0)/(shuj(2,1+i)-y0);
    hf(1,i)=(mn/dc)^2;

    hf(2,i)=(int(1/x.^2,shuj(2,1),shuj(2,1+i)))^2;
end
tc=8.9; % 起始时间
tz=9+34/60; % 终止时间
td=1/30; % 时间间隔
day=114; % 与春分（3 月 21 日）相差的天数
b=23.4392*sin(2*pi/365*day); % 所求日期时太阳直射的纬度
t=tc:td:tz; % 时间
tj1=30-15*(tc-12);
tj2=210-15*(tz-12);
tw=tj1:tj2; % 经度适应范围
ta=find(tw>180);
tw(ta)=tw(ta)-360; % 经度适应范围
nn=length(tw);
qw=zeros(181,nn);
%% 找经纬度
for a=-90:90 % 所求点的纬度
    for w=1:nn % 所求点的经度
        c=15*(t-8+tw(w)/15-12);
        zh=cosd(a).*cosd(b).*cosd(c)+sind(a).*sind(b);
        fi=acosd(zh);
        changdu=2*tan(fi); % 所求影子长度
    for i=1:19
        zhu(i)=changdu(i+2)^2*det([hf(1,i) hf(2,i);hf(1,i+1) hf(2,i+1)])-...
            hf(1,i+2)*det([changdu(i)^2 hf(2,i);changdu(i+1)^2 hf(2,i+1)])-...
            hf(2,i+2)*det([hf(1,i) changdu(i)^2;hf(1,i+1) changdu(i+1)^2]);
    end
end

```

```

qw(a+91,w)=sum(abs(zhu));           %长度比求和
    end
end
[aaa bbb]=find(qw<6.9*10^-16);
disp('对于影子长度匹配模型所求经纬度/(纬度, 经度)')
jieg=[aaa-91,tw(bbb)]
toc

```

10.7 求解第四问（无日期）

```

%% 清除数据
clear
%% 建立图像与真实长度的关系（数据分析）
tic
syms y
x=-495/115*(y-685)+498;
y0=floor(vpa(solve((y-697)/78==(x-1730)/(1919-1730),y)));
x0=floor(vpa(subs(x,y,y0)));        % x0,y0 为图像交点处坐标
dc=(1730-498)*(1080-y0)/(y0-692);
shuj=[876 1678 1667 1655 1648 1641 1624 1618 1610 1601 1587 1583 1576 1569 1554 1542
1537 1524 1518 1512 1499 1493
      883 863 867 869 869 870 872 873 874 874 876 877 879 879 880 881 881 882 883 883 885
885];
% shuj 为在之前从视频上每隔 2 分钟截得的 21 张图中的影子端点的坐标，其中左端点相
同...
% 第 1 列为左端点，第 2 到第 22 列为右端点。
hf=zeros(2,21);
clear x
syms x
for i=1:21
    mn=(x0-shuj(1,1))*(1080-y0)/(shuj(2,1)-y0)+(x0-shuj(1,i+1))*(1080-y0)/(shuj(2,1+i)-y0);
    hf(1,i)=(mn/dc)^2;

    hf(2,i)=(int(1/x.^2,shuj(2,1),shuj(2,1+i)))^2;
end
tc=8.9; %起始时间
tz=9+34/60; %终止时间
td=1/30; %时间间隔
t=tc:td:tz; % 时间
tj1=30-15*(tc-12);
tj2=210-15*(tz-12);
tw=tj1:tj2; %经度适应范围
ta=find(tw>180);

```

```

tw(ta)=tw(ta)-360; %经度适应范围
nn=length(tw);
qw=zeros(181,nn,184);
%% 找经纬度
for day=93:276; %与春分（3月21日）相差的天数
b=23.4392*sin(2*pi/365*day); %所求日期时太阳直射的纬度
for a=-90:90 %所求点的纬度
    for w=1:nn%所求点的经度
c=15*(t-8+tw(w)/15-12);
zh=cosd(a).*cosd(b).*cosd(c)+sind(a).*sind(b);
fi=acos(zh);
changdu=2*tan(fi); %所求影子长度
for i=1:19
    zhu(i)=changdu(i+2)^2*det([hf(1,i) hf(2,i);hf(1,i+1) hf(2,i+1)])-...
        hf(1,i+2)*det([changdu(i)^2 hf(2,i);changdu(i+1)^2 hf(2,i+1)])-...
        hf(2,i+2)*det([hf(1,i) changdu(i)^2;hf(1,i+1) changdu(i+1)^2]);
end
qw(a+91,w,day-92)=sum(abs(zhu)); %长度比求和
end
end
end
[aaa bbb]=find(qw<6.34*10^-16);
aa=aaa-91;bb=tw(mod(bbb,nn));cc=ceil(bbb/nn)+92;
disp('对于影子长度匹配模型所求经纬度/(纬度, 经度, 日期(距离3月21日的天数))')
jieg=[aa,bb',cc]
toc

```

10.8 遗传算法

```

function Jwd(tc,tz,td,fo,wei,jing,day)
%      列      如      :      输      入      :
tc=14.7;tz=15.7;td=0.05;fo=1;wei=19;jing=109.5;day=28;Jwd(tc,tz,td,fo,wei,jing,day)
% tc 起始时间
% tz 终止时间
% td 时间间隔
% fo 附件提取
% wei 所要精确的纬度
% jing 所要精确的经度
% day 当日日期
tic
%% 定义参数
NIND = 100; %个体数目
MAXGEN = 1000; %最大遗传代数
GGAP = 0.3; %代沟

```

```

tra = zeros(MAXGEN,2); %画图所需
data=xlsread('附件 1-3',fo);
tb=180-15*(tz-tc);
cd=sqrt(data(:,2).^2+data(:,3).^2);%所求数据影子长度
cd1=cd(2:21)./cd(1:20);%影子长度比
t=tc:td:tz; % 时间
tj1=30-15*(tc-12);
%% 遗传算法
Chrom = randi([0, 1],NIND, 20); %随机初始种群
gen = 0;
ey = Cdb(Chrom,cd1,tj1,tb,t,wei,jing,day); %求解初始种群函数值
while gen < MAXGEN
    FitnV = ranking(ey); % 分配适应度值
    ef = select('sus',Chrom,FitnV,GGAP); % 优胜劣汰
    ef = recomb('xovsp',ef,0.3); % 基因的重组
    fsd = rep([0;1],[1,20]);
    ef = mutbga(ef, fsd);
    ef = fix(ef); % 遗传变异
    eew = Cdb(ef,cd1,tj1,tb,t,wei,jing,day); % 计算子代目标函数值
    [Chrom ey] = reins(Chrom,ef,1,1,ey,eew); % 重插入
    gen = gen + 1;
    tra(gen,1) = min(ey);
end
%% 结果展示
[Y, I] = min(ey);
figure, plot(tra(:,1),'-');
grid;title('收敛情况');
yz=[2^9 2^8 2^7 2^6 2^5 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0];
a1=sum(Chrom(1,1:10).*yz);
w1=sum(Chrom(1,11:20).*yz);
a=(wei-1)+2*a1/2^10,
w=(jing-1)+2*w1/2^10,

```

toc

10.9 遗传算法中的子函数

```

function value=Cdb(Chrom,cd1,tj1,tb,t,wei,jing,day)
[m1,n1]=size(Chrom);
yz=[2^9 2^8 2^7 2^6 2^5 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0];
value = zeros(m1,1);
for k = 1 : m1
    a1=sum(Chrom(k,1:10).*yz);
    w1=sum(Chrom(k,11:20).*yz);

    a=(wei-1)+2*a1/2^10; % 纬度微小震荡

```

```

w=(jing-1)+2*w1/2^10; %经度微小震荡

b=23.4392*sin(2*pi/365*day); %所求日期时太阳直射的纬度
c=15*(t-8+w/15-12); %太阳时角
zh=cosd(a).*cosd(b).*cosd(c)+sind(a).*sind(b);
fi=acos(zh);
changdu=tan(fi); %所求影子长度
cd2=changdu(2:21)./changdu(1:20);
value(k)=sum((cd1-cd2).^2);

end
end

```