

# 题目 基于太阳影子变化的定位研究

## 摘要

近年来视频数据在科学和生活中使用越来越广泛,通过分析视频中太阳影子的变化可以确定视频的拍摄地点和拍摄日期。以太阳影子的变化为背景提出了四个问题,本文通过运用地理知识、空间直角坐标系、非线性最小二乘拟合等方法成功解决了这四个问题,得到了太阳影子变化关于经纬度、日期和时刻变化的函数方程以及怎样在给定条件下确定最优的位置时间参数解。

针对问题 1: 首先,以地心为原点建立空间直角坐标系,用位置坐标描述北京时刻变化;其次,以正午 12 点为基准根据太阳时角确定北京与地心连线的向量  $\vec{n}$ ,同时根据日期序数确定太阳光线过球心与球面的交点的向量  $\vec{m}$ ;然后,由向量乘积公式和三角变换确定太阳高度角;最后,用 MATLAB 作图得到影子长度的变化曲线。

针对问题 2: 首先,根据附件 1 建立直角坐标系,分别确定太阳高度角与时刻、纬度与日期序数以及赤纬角与经度的关系;其次,引进经线与 x 轴成的角度和太阳方位角  $f = \arcsin\left(\frac{\cos \theta \sin \alpha}{\cosh}\right)$ , 带入已知参数,确立 y 关于 x 与经纬度的函数方程;然后,用 MATLAB 进行非线性最小二乘拟合,拟合得到经纬度;最后,计算不同拟合参数不同组数据下的杆长,通过标准差选择最优解。

针对问题 3: 首先,根据附件 2 和附件 3 建立直角坐标系,用日期序数表示赤纬角;其次,在问题 2 得到的 y 关于 x 与经纬度的函数方程的基础上,增函数方程的未知参数个数日期序数,得到新的函数方程;然后,用 MATLAB 进行非线性最小二乘拟合,拟合得到经纬度以及日期序数;最后,根据拟合参数计算杆长,通过标准差选择最优解。

针对问题 4: 首先,运用 MATLAB 将视频转化为图片,通过分析图片建立合理的空间直角坐标系,从图片中获取时间对应于影长的 y 值;其次,建立 x 关于 y 以及太阳高度角和影长之间函数关系,将 x 用表示;然后,将问题 2 中得到的 y 关于 x 与经纬度的函数方程化简为 y 关于经纬度的函数方程并用 MATLAB 拟合定位;最后,根据拟合参数结合视频中获取的数据选择最优解。

最后,对所建立的模型和求解方法的优缺点给出了客观的评价,并验证了模型的可行性。

关键词: 影子长度 赤纬角 太阳高度角 非线性最小二乘拟合 最优解

# 一. 问题重述

## 1.1. 太阳影子定位的背景

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面,根据地理以及物理知识,影子长度受到经纬度、日期以及时刻的影响。通过影子的变化,能够确定影子所在的位置以及日期和时刻。太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化,确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

## 1.2. 题中涉及知识点的说明

- 1.赤纬角是指地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角。
- 2.太阳时角是指观测点天球子午圈沿天赤道量至太阳所在时圈的角距离<sup>[4]</sup>。
- 3.太阳方位角指太阳光线在地平面上的投影与当地经线的夹角。
- 4.太阳高度角是指某地太阳光线与通过该地与地心相连的地表切线的夹角。

## 1.3. 所要解决问题的说明

1.根据影子长度变化的影响因素,分析影子长度关于各个参数的变化规律,建立影子长度变化的数学模型。应用模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒)3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

2.根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据,建立影子坐标关于经纬度的数学模型,确定直杆所处的地点。将模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据,通过求解模型确定若干个可能的地点。

3.根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据,建立影子坐标关于经纬度以及日期序数的数学模型,确定直杆所处的地点和日期。将模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据,通过求解模型确定若干个可能的地点与日期。

4.在只给出一根直杆在太阳下的影子变化的视频、拍摄日期、拍摄时间以及直杆高度的情况下,通过对视频的分析,得到相应数据,建立确定视频拍摄地点的数学模型,并根据数据求解得到若干个可能的拍摄地点。

减少给出的条件,假定拍摄日期未知,通过对视频的分析得到的数据,建立确定视频拍摄地点的数学模型,并根据数据求解得到若干个可能的拍摄地点。

## 二. 符号说明

---

符号	定义
$\theta_i$	纬度
$a_i$	经度
$t$	北京时间（东八区标准时间，东经 120 度）
$t_0$	北京当地时间（东经 116 度 23 分 29 秒）
$n_i$	日期序数
$\alpha_i$	赤纬角
$\varphi_i$	北京时刻太阳时角
$\beta$	太阳光线与地心与北京天安门广场连线的夹角
$H_i$	杆的高度
$h_i$	太阳高度角
$L_i$	杆在不同时刻的影子长度
$f_i$	太阳方位角
$C_i$	投影与 x 轴所夹角和太阳方位角之差
$\mu_i$	N 组杆长的算数平均数
$\delta_i$	N 组杆长的标准差
$\Delta t_i$	附件 1 影子长度的测量地点当地时间与北京时间的时差

---

### 三. 问题假设

- 1.地球是一个规则的球体;
- 2.假定所有的数据真实有效, 没有遗漏;
- 3.2015年10月22日, 北京天气状况良好, 适合测量影子长度;
- 4.影子的长度不受地球的自转公转太阳光线照射角度以外的其他因素的影响;
- 5.用软件对视频和图片进行处理时, 假定处理之后的数据精确度较高;
- 6.忽略年份对于影子长度的影响, 假定每一年的同一时刻, 在不受到外界因素影响的情况下, 影子的长度变化相同。

### 四. 问题分析

#### 4.1. 对问题 1 的分析

影子长度与太阳高度角息息相关, 在杆长已知的情况下, 可利用太阳高度角求影子长度。通过分析太阳高度角关于经纬度、太阳时角、赤纬角的变化规律得到影子长度关于这些参数的变化规律, 从而建立影子长度的数学模型, 并通过编程太阳影子长度的变化曲线。

#### 4.2. 对问题 2 的分析

杆在某一点的投影与当地经线的夹角为太阳方位角, 在只知道投影坐标的情况下, 先建立太阳方位角与经纬度的函数关系, 然后建立太阳方位角与杆投影坐标的函数关系, 接着把经纬度当做参数确定投影坐标与经纬度的关系, 最后对所给数据进行数据处理得到经纬度的值。

#### 4.3. 对问题 3 的分析

问题 3 相比于问题 2, 附件的数据中没有给出日期, 并且要求根据数据求出观测数据时的日期。而太阳赤纬角在周年运动中任何时刻的具体值都是严格已知的, 并且可以通过日期(距离 1 月 1 日的天数)计算。在太阳方位角的计算中, 将日期转化为一个参数, 通过问题 2 中的拟合同时求出, 得到经纬度的值以及日期。

#### 4.4. 对问题 4 的分析

问题 4 中只给出了一段观测太阳影子变化的视频, 要通过软件将视频转化为图片。在分析图片的过程中建立关于影子长度的直角坐标系, 得到精确度较高的数值, 即在问题 2 和问题 3 的基础上增加了视频图片的处理。通过分析之后的数据, 运用拟合, 确定未知参数, 定位视频中的地点。

## 五. 模型的建立与求解

### 5.1. 问题 1 模型的建立与求解——空间向量模型

#### 5.1.1. 模型的建立

影长随时间的变化是在地球自转和公转影响下产生的地理物理现象，根据地球的特征，将地球看做一个球体，建立一个空间直角坐标系，地心为坐标系原点，球的方程为  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，构造空间向量模型。地球自西向东自转，在空间直角坐标系中，选取一个时间点作为标准，用  $x$ 、 $y$  轴坐标的变化来描述地球的自转（24 小时内时间变化）过程中某一点位置的变化。

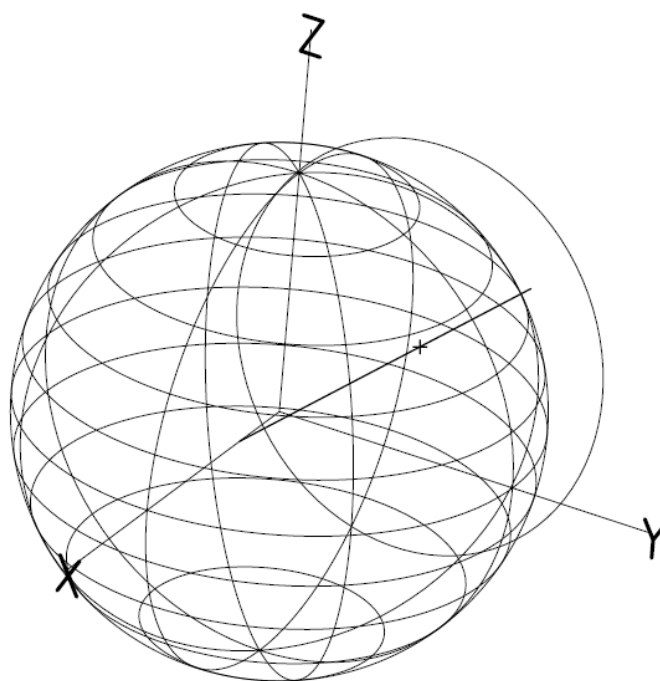


图1：地球的三维空间图

假定正午 12 时北京的太阳高度角达到最大时，北京位于  $zOy$  平面上，坐标为  $(0, \cos \theta, \sin \theta)$ 。9-12 点，北京所在点位于第一卦限上，12-15 时，位于第二卦限上。地球自转的周期为 24 小时，以正午 12 点为基准，计算北京当地时间  $t_0$  的北京的太阳时角

$$\varphi = 15^\circ (12 - t_0)$$

其中，北京当地时间用北京时间表示

$$t_0 = t - \frac{4(120 - a)}{60}$$

北京的坐标为  $(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$ 。根据太阳时角确定地心与北京所

在点连线的向量表示，即北京点所在的法线的向量表示 $\vec{n}$ 。

太阳光线始终与 $zOy$ 平面平行，并且可根据赤纬角确定太阳光线过球心与球面的交点为 $(0, \cos\alpha, \sin\alpha)$ 。由于太阳赤纬角在周年运动中任何时刻的具体值都是严格已知的<sup>[2]</sup>

$$\alpha = 23.45 \sin \left[ \frac{2\pi (284 + n)}{365} \right]$$

得到赤纬角过球心与球面的交点的向量 $\vec{m}$ 。

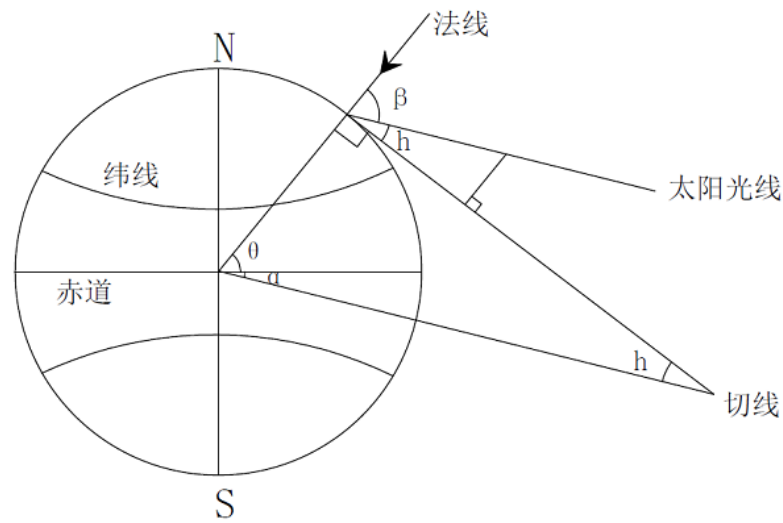


图2：地球截面图

根据向量的知识，利用向量的乘积公式求得法线与太阳光线所成 $\beta$ 的角度。

北京与地心所成的法线与北京地表所在的切线成直角，利用三角函数求出北京天安门广场的太阳高度角 $h$

$$\sin h = \cos \beta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|}$$

对于不同时刻的太阳高度角<sup>[2]</sup>，已知杆长，有

$$\tan h = \frac{H}{L}$$

结合公式(1)(2)(3)(4)(5)，即可求得杆在不同时刻的影子长度关于北京经纬度、当地时间以及测量日期四个参数的函数关系式

$$L = H \tan(\arcsin(\frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|}))$$

### 5.1.2. 模型的求解

北京的纬度为北纬  $39^{\circ}54'26''$ ，经度为  $116^{\circ}23'29''$ 。以正午 12 点为基准， $t_0$  时刻的太阳时角为  $\varphi = 15^{\circ}(12-t_0)$ ， $t_0 = t - \frac{3^{\circ}36'31''}{15}$ ， $t_0$  时刻北京的法线的向量表示为

$$\vec{n} = (\cos 39^{\circ}54'26'' \cos(183^{\circ}36'31'' - 15t), \cos 39^{\circ}54'26'' \sin(183^{\circ}36'31'' - 15t), \sin 39^{\circ}54'26'')$$

10 月 22 日为一年的第 295 天，带入赤纬角的计算公式，计算得 10 月 22 日的赤纬角是  $\alpha = -12^{\circ}6'6''$ 。太阳光线的向量表示

$$\vec{m} = (0, \cos(-12^{\circ}6'6''), \sin(-12^{\circ}6'6''))$$

将杆长  $H=3$ 、公式 (7) (8) 带入公式 (6)，并对不同  $t$  时刻的影子长度，用 MATLAB2014 编程<sup>[5]</sup>（程序参见附录 1），得到 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线如下：

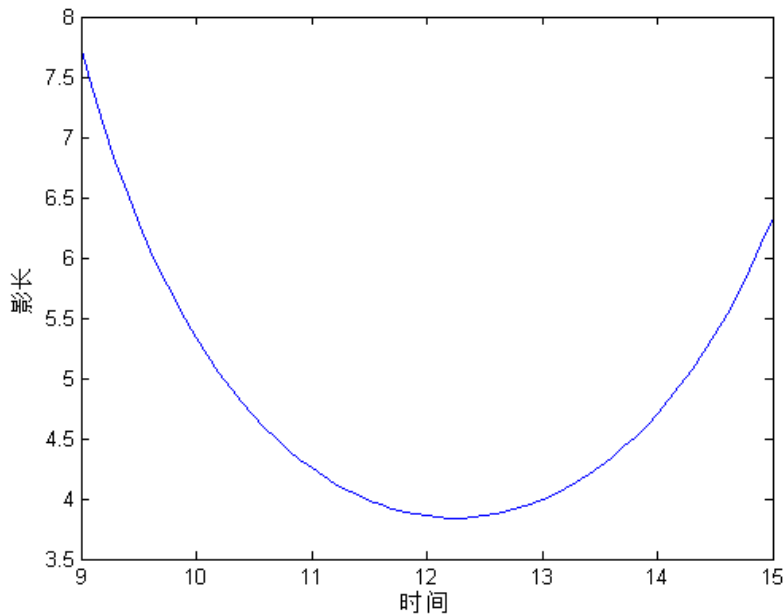


图3：太阳影子长度的变化曲线图

图形结合公式表明，在其他参数不变的情况下，随着纬度的增大，影子的长度增大；随着赤纬角的增大，影子的长度也逐渐增大；随着经度的增大，影子的长度逐渐减小；随着一天内时间的变化，上午 9 点到中午 12 点影子长度逐渐减小，正午 12 点到下午 15 点影子长度逐渐增大，在正午 12 点时影子长度最小。

## 5.2. 问题 2 与问题 3 模型的建立与求解——非线性最小二乘拟合模型

### 5.2.1. 模型的建立

太阳方位角即太阳所在的方位，指太阳光线在地平面上的投影与当地经线的夹角。根据附件 1、附件 2 和附件 3 给出的数据，建立一个空间直角坐标系。杆为  $z$  轴，地平面为  $xOy$  平面，附件 1 所给的数据是在点 A 所测量的影子长度在  $xOy$  平面的坐标，附件 2 所给的数据是在点 B 所测量的影子长度在  $xOy$  平面的坐标，附件 3 所给的数据是在点 D 所测量的影子长度在  $xOy$  平面的坐标。

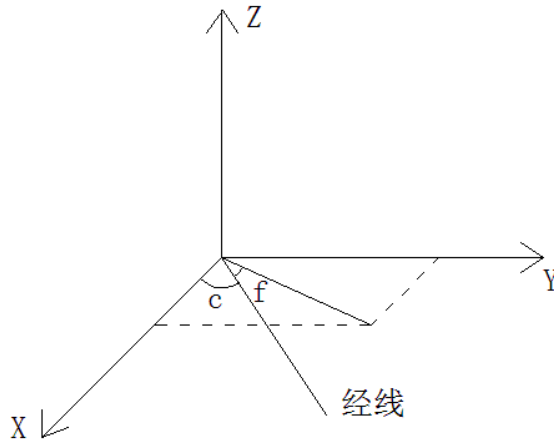


图4：投影坐标图

在问题 1 建立的空间向量模型的基础上，得到 A、B、C 点的纬度、赤纬角度、以及太阳高度角的公式表示，并由此计算太阳方位角<sup>[3]</sup>：

$$f = \arcsin\left(\frac{\cos \theta \sin \alpha}{\cosh}\right)$$

在  $xOy$  平面上，经线与  $x$  轴成一个角度，该角度为  $C$  ( $0^\circ \leq C \leq 180^\circ$ )，则杆在  $xOy$  平面的投影与  $x$  轴所成的角为  $f + C$ ，即：

$$y = x \tan(f + C)$$

根据附件 1 所给的数据，用 MATLAB 进行非线性最小二乘拟合。在拟合的过程中，限定一个范围，赋予不同的初值，由拟合的结果得到纬度  $\theta_A$ 、角度  $C_A$ 、A 点与北京时间时差  $\Delta t_A$ 。根据  $\Delta t_A$  求得 A 点的经度，确定 A 点的位置。

根据附件 2、3 所给的数据，同样用 MATLAB 进行非线性最小二乘拟合。在拟合的过程中，限定一个范围，赋予不同的初值，由拟合的结果得到纬度  $\theta_B$  和  $\theta_D$ ，角度  $C_B$  和  $C_D$ ，B 点与 D 点分别与北京时间时差  $\Delta t_B$  和  $\Delta t_D$ ，日期序数  $n_B$  和



$n_D$ 。根据  $\Delta t_B$  和  $\Delta t_D$  求得 B 点和 D 点的经度，确定 B 点和 D 点的位置；根据日期序数  $n_B$  和  $n_D$ ，确定在 B 点和 D 点观测影子长度时的具体日期。

问题 2 中只要求确定观测点的具体位置，问题 3 还要求确定在观测点观测的具体时间。对问题 3 拟合是，拟合结果比问题 2 多一个参数日期序数  $n$ ，用来确定在观测点观测的具体日期。

### 5.2.2. 问题 2 的求解

根据问题 1 建立的空间向量模型，将地球看做一个球体，建立一个空间直角坐标系，地心为坐标系原点，球的方程为  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，用  $x$ 、 $y$  轴坐标的变化来描述地球的自转过程中某一点位置的变化。

A 点的当地时间为正午 12 时，测量点的太阳高度角达到最大，此时 A 点位于  $zOy$  平面上，坐标为  $(0, \cos \theta_A, \sin \theta_A)$ 。14-16 时，位于第二或者第六卦限上。地球自转的周期为 24 小时，以 A 点正午 12 点为基准，计算北京时刻  $t$  时该测量点的太阳时角

$$\varphi_A = 15^\circ(12 - \Delta t_A) = (180 - 15\Delta t_A)^\circ$$

用 A 点经度  $a$  计算 A 点当地时间与北京时间的时差

$$\Delta t_A = t - \frac{4(120 - a_A)}{60} = t - 8 + \frac{a_A}{15}$$

代入公式可得 A 点所在的法线的向量表示为

$$\vec{n}_A = (\cos \theta_A \cos(300 - 15t - a_A)^\circ, \cos \theta_A (300 - 15t - a_A)^\circ, \sin \theta_A)$$

根据赤纬角公式  $\alpha = 23.45 \sin \left[ \frac{2\pi (284 + n)}{365} \right]$ ，2015 年 4 月 18 日的日期序列  $n$  为

107，2015 年 4 月 18 日的赤纬角为  $\alpha = 23.45 \sin \frac{782\pi}{365}$ 。太阳光线始终与  $zOy$  平面平行，太阳光线过球心与球面的交点的向量表示

$$\vec{m}_A = (0, \cos(23.45 \sin \frac{782\pi}{365}), \sin(23.45 \sin \frac{782\pi}{365}))$$

由向量的乘积公式的以及三角函数关系，求出  $h_A = \arccos(\vec{n}_A \cdot \vec{m}_A)$ 。结合  $y = x \tan(f + C)$ ，得到  $y_A$  与  $x_A$  关于参数纬度  $\theta_A$ 、投影与  $x$  轴所夹角和太阳方位角之差  $C_A$  为、杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t_A$  的函数关系

$$y_A = x_A \tan(\arcsin \frac{\cos \theta_A \sin (23.45 \sin \frac{782\pi}{365})}{\cos(\arcsin(n_A \cdot m_A))}) + C_A$$

将附件 1 中的数据由 MATLAB2014 非线性最小二乘拟合<sup>[1]</sup>（程序参见附录 2）

$$\min_x \|F(x, xdata) - ydata\|_2^2 = \min_x \sum_i (F(x, xdata_i) - ydata_i)^2$$

得到两组结果：

(1) 纬度  $\theta_A$  为：18.232941

投影与 x 轴所夹角和太阳方位角之差  $C_A$  为：1.831402

杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t_A$  为：41.803644

计算的经度  $a_A$  为：109.549089，定位在海南省三亚市；

(2) 纬度  $\theta_A$  为：-10.019557

投影与 x 轴所夹角和太阳方位角之差  $C_A$  为：1.565434

杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t_A$  为：0.313559

计算的经度  $a_A$  为：119.921610，定位在印度尼西亚。

在拟合过程中，由于给出的初值不同，得到两组拟合结果比较好的参数，根据这两组参数值以及附件 1 中的数据计算太阳高度角：

$$\tan h_A = \tan(\arccos(\vec{n}_A \cdot \vec{m}_A))$$

然后计算杆长：

$$L_A = \tan h_A \cdot (x_A^2 + y_A^2)^{\frac{1}{2}}$$

并计算杆长的算术平均数和杆长的标准差。通过对两组数据标准差的比较：第一组的标准差较小，第一组拟合结果更优，附件 1 数据的测量地点在北纬 18.232941 度，东经 109.549089 度。

### 5.2.3. 问题 3 的求解

在求解问题 2 的基础上，问题 3 中附件数据观测的日期未给出，无法得到赤纬角的具体值。根据问题 1 得测量 B 点时的赤纬角  $\alpha_B = 23.45 \sin \frac{2\pi(284+n)}{365}$  太阳光线始终与  $zOy$  平面平行，太阳光线过球心与球面的交点的向量表示

$$\vec{m}_B = (0, \cos(23.45 \sin \frac{2\pi(284+n_B)}{365}), \sin(23.45 \sin \frac{2\pi(284+n_B)}{365}))$$

得到  $y_B$  与  $x_B$  关于参数纬度  $\theta_B$ 、投影与 x 轴所夹角和太阳方位角之差  $C_B$  为、杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t_B$  以及观测 B 点时的日期序数  $n_B$  的函数关系

$$y_B = x_B \tan(\arcsin \frac{\cos \theta_B \sin(23.45 \sin \frac{2\pi(284+n_B)}{365})}{\cos(\arcsin(n_B \cdot \vec{m}_B))} + C_B)$$

由 MATLAB2014 非线性最小二乘拟合<sup>[1]</sup> (程序参见附录 4)

$$\min_x \|F(x, xdata) - ydata\|_2^2 = \min_x \sum_i (F(x, xdata_i) - ydata_i)^2$$

在拟合过程中, 由于给出的初值不同, 得到多组拟合参数, 根据参数值以及附件 2 中的数据计算太阳高度角

$$\tan h_B = \tan(\arccos(\vec{n}_B \cdot \vec{m}_B))$$

然后计算杆长

$$L_B = \tan h_B \cdot (x_B^2 + y_B^2)^{\frac{1}{2}}$$

并计算杆长的算术平均数和杆长的标准差。

带入附件 2 中的数据, 在 MATLAB2014 中编程<sup>[1]</sup> (程序参见附录), 经过比较后得到的 B 点位置与观测时间地最优解在新疆:

纬度  $\theta_B$  为: 39.405909

经度  $a_B$  为: 79.769811

投影与 x 轴所夹角和太阳方位角之差  $C_B$  为: -1.219293

杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t_B$ : 160.920758

日期序数  $n_B$  为(与 1 月 1 日相差天数): 140.880966, 即 5 月 21 日

同理, 带入附件 3 中的数据, 在 MATLAB2014 中编程<sup>[1]</sup> (程序参见附录), 经过比较后得到的 D 点位置与观测时间地最优解在湖南:

纬度  $\theta_D$  为: 28.949228

经度  $a_D$  为: 110.052026

投影与 x 轴所夹角和太阳方位角之差  $C_D$  为: 1.391863

杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t_D$ : 39.791895

日期序数  $n_D$  为(与 1 月 1 日相差天数): 20.026673, 即 1 月 21 日

#### 5.2.4. 模型的检验

##### 5.2.4.1. 对问题 2 的检验

带入附件 1 中的数据以及拟合的参数, 在 MATLAB2014 中编程<sup>[1]</sup> (程序参见附录 2), 得到在 21 组不同  $x_A$ 、 $y_A$  值下杆长的值、算术平均数以及标准差

(1) 杆长序列为:

Columns 1 through 14

	1.9856	1.9855	1.9854	1.9855	1.9853	1.9851
1.9850	1.9849	1.9849	1.9846	1.9845	1.9843	1.9842
1.9840						

Columns 15 through 21

	1.9837	1.9835	1.9832	1.9829	1.9827	1.9824
1.9822						

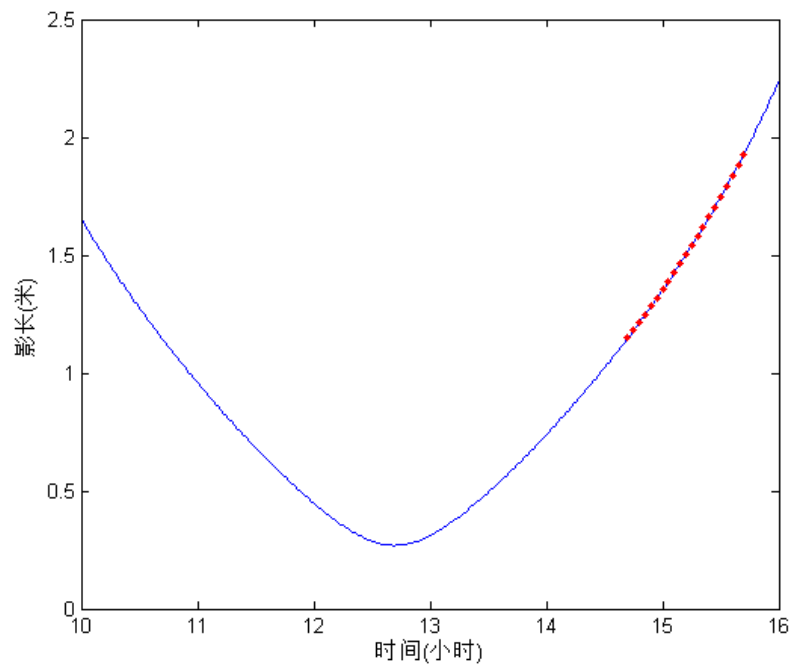


图5: A 点参数 (1) 的杆长拟合图

平均杆长  $\mu_A$  为: 1.984265

标准差  $\delta_A$  为: 0.032987

(2) 杆长序列为:

Columns 1 through 14

	1.1438	1.1493	1.1543	1.1589	1.1629	1.1665
1.1696	1.1722	1.1745	1.1762	1.1775	1.1784	1.1789
1.1789						

Columns 15 through 21

	1.1785	1.1777	1.1764	1.1746	1.1725	1.1699
1.1668						

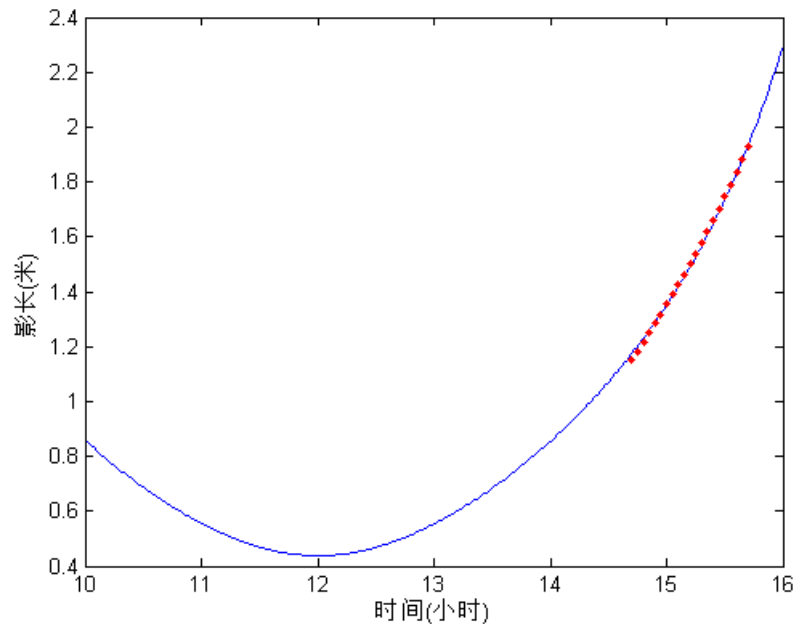


图6: A 点参数 (2) 的杆长拟合图

平均杆长  $\mu_A$  为: 1.169451

标准差  $\delta_A$  为: 0.101221

#### 5.2.4.2. 对问题 3 第一部分的检验

带入附件 2 中的数据以及拟合的参数, 在 MATLAB2014 中编程<sup>[1]</sup> (程序参见附录), 得到在 21 组不同  $x_B$ 、 $y_B$  值下杆长的值、算术平均数以及标准差  
杆长序列为:

Columns 1 through 14

	1.9853	1.9853	1.9855	1.9855	1.9855	1.9856
1.9856	1.9856	1.9855	1.9855	1.9855	1.9855	1.9856
1.9856						

Columns 15 through 21

	1.9855	1.9855	1.9854	1.9854	1.9851	1.9851
1.9850						

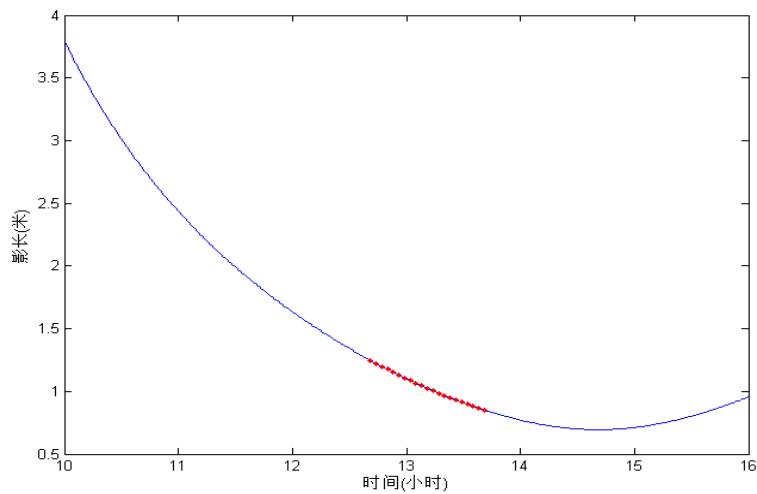


图7: B点最优解的杆长拟合图

平均杆长  $\mu_B$  为: 1.985435

标准差  $\delta_B$  为: 0.013310

#### 5. 2. 4. 3. 对问题 3 第二部分的检验

带入附件 3 中的数据以及拟合的参数, 在 MATLAB2014 中编程<sup>[1]</sup> (程序参见附录 2), 得到在 21 组不同  $x_D$ 、 $y_D$  值下杆长的值、算术平均数以及标准差杆长序列为:

Columns 1 through 14

	2.9871	2.9872	2.9875	2.9874	2.9876	2.9878
2.9878	2.9879	2.9879	2.9880	2.9879	2.9879	2.9879
2.9878						

Columns 15 through 21

2.9878      2.9876      2.9875      2.9874      2.9873      2.9870  
2.9869

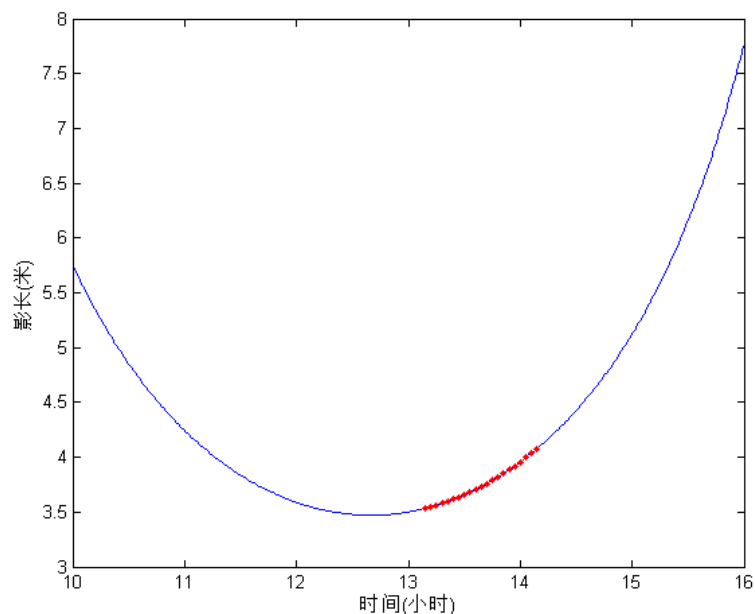


图8: D点最优解的杆长拟合图

平均杆长  $\mu_D$  为: 2.987582

标准差  $\delta_D$  为: 0.018124

对问题 2 和问题 3 的检验所得到的图片以及运算结果表明: 四组结果的杆长的标准差都很小, 说明数据组中每组数据拟合的杆长非常接近, 模型具有可行性。

### 5.3. 问题 4 模型的建立与求解——y 值拟合法

#### 5.3.1. 模型的建立

对于附件 4 所给的 avi 视频, 用 MATLAB 对视频读取处理, 将 avi 视频转换成图片序列。每两分钟视频得到一张图片, 共计 21 张。用 MATLAB 读取图片数据, 在最后一分钟时, 直杆的投影与图片中的路边平行。以直杆为 z 轴, 最后一分钟直杆的投影所在方向为 y 轴, x 轴与 y 轴垂直, 建立空间直角坐标系。并根据此坐标系用 MATLAB 得到 21 张图片中的 y 值以及相应的 y 时刻的值, 该组值为在 E 点处得到的 y 以及对应时刻的精确值。

对比问题 2, 问题 4 的第一问缺少了相应时刻的 x 的精确测量值。根据建立的空间直角坐标系, 影子长度的坐标 x 与 y 之间存在

$$L^2 = x^2 + y^2$$

影子的长度与直杆之间存在

$$\tanh = \frac{H}{L}$$

即  $x$  对于  $y$  与参数之间存在简单的函数关系。

利用问题 2 与问题 3 的结论，已知  $y$  与  $x$  关于参数纬度  $\theta$ 、投影与  $x$  轴所夹角和太阳方位角之差  $C$ 、杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t$  以及日期序数  $n$  的函数关系

$$y = x \tan(\arcsin \frac{\cos \theta \sin (23.45 \sin \frac{2\pi(284+n)}{365})}{\cos(\arcsin(\vec{n} \cdot \vec{m}))} + C)$$

结合上面三式得到  $y$  关于参数纬度  $\theta$ 、投影与  $x$  轴所夹角和太阳方位角之差  $C$ 、杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t$  以及日期序数  $n$  的函数关系。

问题 4 的第二问中比第一问缺少了一个日期，无法确定赤纬角度，即第二问比第一问得到的函数关系中，多了一个未知参数。

两问均是通过对视频解析数据用 MATLAB 进行非线性最小二乘拟合，得到其他未知参数的拟合值，确定 E 点的位置。

### 5.3.2. 模型的求解

根据赤纬角公式  $\alpha = 23.45 \sin \left[ \frac{2\pi(284+n)}{365} \right]$ ，7 月 13 日的日期序列  $n$  194，

7 月 13 日的赤纬角为  $\alpha = 23.45 \sin \frac{954\pi}{365}$ 。太阳光线过球心与球面的交点的向量

$$\vec{m}_E = (0, \cos (23.45 \sin \frac{954\pi}{365}), \sin (23.45 \sin \frac{954\pi}{365}))$$

$y_E$  与  $x_E$  关于参数纬度  $\theta_E$ 、投影与  $x$  轴所夹角和太阳方位角之差  $C_E$  为、杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t_E$  的函数关系

$$y_E = x_E \tan(\arcsin \frac{\cos \theta_E \sin (23.45 \sin \frac{954\pi}{365})}{\cos(\arcsin(\vec{n}_E \cdot \vec{m}_E))} + C_E)$$

将附件 1 中的数据由 MATLAB2014 非线性最小二乘拟合<sup>[1]</sup>(程序参见附录)，在拟合过程中，由于给出的初值不同，得到多组拟合参数，根据参数值以及附件 2 中的数据计算计算杆长  $L_B = \tanh_B \cdot (x_B^2 + y_B^2)^{\frac{1}{2}}$ ，并计算杆长的算术平均数和杆的标准差镜像边角，得到最优结果如下：

所在地：内蒙古



纬度  $\theta_E$  为: 41.971603

经度  $a_E$  为: 112.444800

投影与 x 轴所夹角和太阳方位角之差  $C_E$  为: 0.084945

杆所在位置与北京时间的时间差  $\Delta t_E$ : 30.220801

### 5.3.3. 模型的检验

根据参数值以及附件 2 中的数据计算杆长  $L_B = \tan h_B \cdot (x_B^2 + y_B^2)^{\frac{1}{2}}$ , 并计算杆长的算术平均数和杆的标准差,

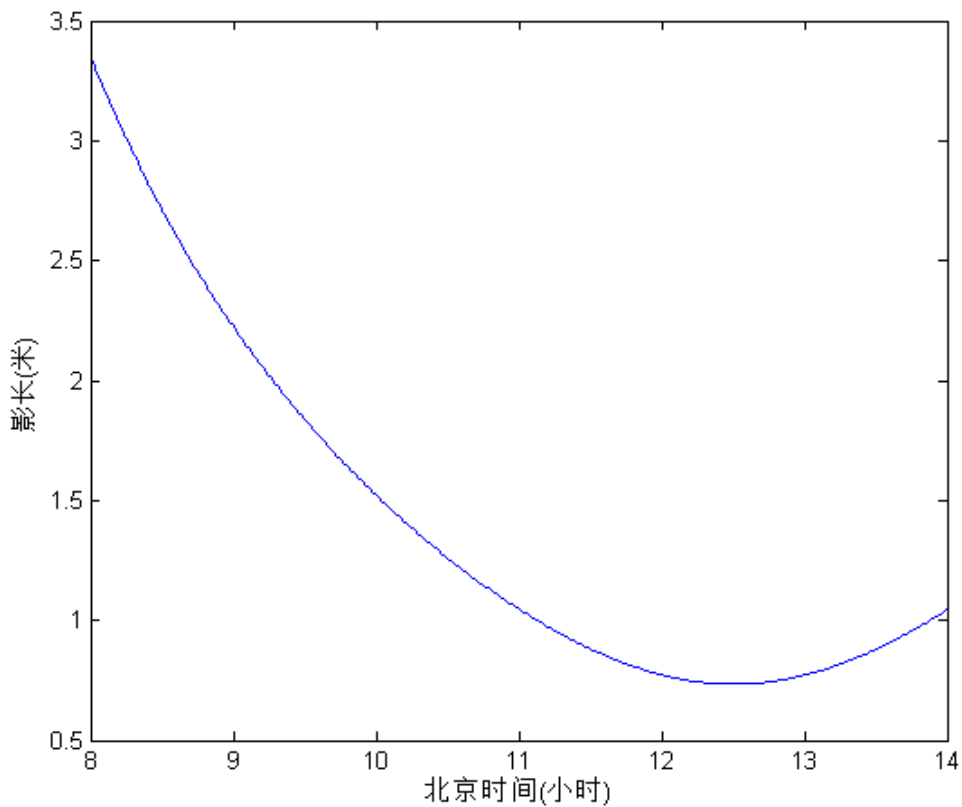


图9: E点最优杆长的拟合图

标准差  $\delta_E$  为 0.062178, 标准差的值非常小, 说明根据拟合结果得到的参数在一个数据组中计算的杆长 非常接近, 模型具有可行性。

## 六. 模型的评价

### 6.1. 模型的优点

1.文章中大部分的公式都是自行推导，论文的创新性很强。

2.对众多参数用科学的方法进行选取，建立起经纬度、杆长、影长、赤纬角等参数之间的函数联系，运用数学工具通过已知参数确定未知参数，整篇论文模型架构是一体的。

3.充分利用 MATLAB、CAD 等软件进行编程画图，得到的结果误差小，大大简化了计算，也使得数据合理准确，能同时得到多个想要的判定指标，能够便捷直观的从众多组解中得到最优解。

4.将所有数据公式化，根据问题给出了判别结果优劣的统一检验方案，当问题出现小幅变动时，检验方案依旧成立，便于理解计算，具有普适性。

5.在视频数据读取上，采用的是软件读取，通过 MATLAB 处理视频得到图片，并读取影子长度，数据出现的偏差较小，准确度较高。

6.模型建立的合理性，本文的模型建立是在对地理以及物理知识进行充分理解基础之上，充分运用了各个学科的知识，将复杂地理知识抽象成数学坐标，原理简单易懂，并且切实可行。

### 6.2. 模型的缺点

1.由于地理因素的多变性，我们对地理因素做出了严格的假设，使得模型的使用条件变得苛刻。

2.模型单一，不能从多个方面多个角度考虑问题，问题的求解存在很大的局限性，说服力较小。

3.整篇论文使用一个模型，采用非线性最小二乘法拟合。在问题 3 和问题 4 中，未知参数的数量变多，使得赋予不同初值时，拟合的结果之间偏差很大。

4.在问题 2 和问题 3 中，对于多组初值导致的结果不同，通过计算标准差和算术平均数从中选取最优值，未考虑初值的取值方法。

## 七. 参考文献

- [1] 王可,毛志伋.基于 Matlab 实现最小二乘曲线拟合[J].北京广播学院学报(自然科学版),2005,12(2):52~56.
- [2] 蒋洪力.太阳直射点纬度的数学推导和分析[J].数学通报,2007,46(9):39~40.
- [3] 贺晓雷,于贺军,李建英,丁蕾.太阳方位角的公式求解及其应用[J].太阳能学报,2008,29(1):69~72.
- [4] 武琳.基于太阳阴影轨迹的经纬度估计技术研究[D].天津:天津大学,2010.
- [5] 何希平,张琼华.基于 MATLAB 的图像处理与分析[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2003,20(2):22~25.

## 八. 附录

### Matlab求解程序 (Matlab R2014a)

#### 1. 第一问的代码:

##### MCMA1.m

```
H = zeros(1,61);
q=23.45*sin(2*pi*(284+turndate([10 22]))/365);%通过日期得到赤纬角
t=9:0.1:15;
for i=1:61
    H(i)=calcLong(turndegree([39 54 26]),q,t(i),3);
end
plot(t,H)
xlabel('时间')
ylabel('影长')
```

##### calcLong.m

```
function [l]=calcLong(theta,alpha,t,h)
%theta为纬度 alpha为赤纬角 t为北京时间 h为杆长 %l为投影长
t=t-(120-turndegree([116 23 29]))*4/60;
s=[cos(theta*pi/180)*sin((12-t)*pi/12),cos(theta*pi/180)*cos((12-t)*pi/12),sin(theta*pi/180)];%光线的向量
n=[0,cos(alpha*pi/180),sin(alpha*pi/180)];%球上所在地的法向量
sinH=abs(sum(s.*n));%H为赤纬角
cosH=(1-(sinH)^2)^(1/2);
tanH=sinH/cosH;
l=h/tanH;
```

##### turndegree.m

```
function d=turndegree(D)
%度数转换方法
d=D(1)+D(2)/60+D(3)/3600;
```

### turndate.m

```
function d=turndate(D)
%把日期转换为资1月1日起的天数
mon=[31 28 31 30 31 30 31 31 30 31 30 31];
d=D(2);
for i=1:D(1)-1
    d=d+mon(i);
end
```

### 2. 第二题的代码:

### MCMA2.m

```
A=xlsread('附件1-3',1);%获取附件1的数据
x=A(:,2);
y=A(:,3);
p = x';
t=882:3:942;
flag=zeros(1,length(t));
flag(1,1)=1;
para=lsqcurvefit(@tempfun,[30,0,0],[t;x';flag],y');%对数据进行拟合,拟合的方法为
tempfun
flag(1,1)=0;

longitude=120-para(3)/4;%根据时间差求出经度
fprintf('纬度为: %f 投影与x轴所夹角和太阳方位角之差为: %f 杆所在位置与
北京时间的时差: %f\n', para(1), para(2), para(3));
fprintf('经度为: %f\n', longitude);
tickh=tempfun(para,[t;x';flag]);%拟合出杆长

time=600:1:960;
H = zeros(1,length(time));
q=23.45*sin(2*pi*(284+turndate([4 18]))/365);

for i=1:length(time)
    H(i)=fitfun(para(1),q,para(3),time(i),tickh);
end
plot(time,H)
hold on

l=(x.^2+y.^2).^(1/2);
plot(t,l,'.r');
xlabel('时间(小时)')
```

```

ylabel('影长(米)')
set(gca,'XLim',[600 960]);
set(gca,'XTick',(600:60:960));
set(gca,'XTickLabel',(10:1:18));

```

#### tempfun.m

```

function y0=tempfun(x,xdata)
%x(1)为纬度 x(2)为与投影与x轴所夹角和太阳方位角之差 x(3)为杆所在位置与北京时
间的时间差
q=(23.45*sin(2*pi*(284+turndate([4 18]))/365))*pi/180;%通过日期得到赤纬角
t=xdata(1,:)-x(3);%xdata(1,:)为北京时间
for i=1:length(t)
    if t(i)>1440
        t(i) = mod(t(i),1440);
    end
    if t(i)<0
        t(i) = mod(t(i)+1440,1440);
    end
end
s=(720-t)*pi/720;%时角
sinH=abs(cos(x(1)*pi/180)*cos(s)*cos(q) + sin(x(1)*pi/180)*sin(q));
cosH=(1-(sinH).^2).^(1/2);
f=asin(cos(q)*sin(s)./cosH);%f为方位角
y0=xdata(2,:).*tan(x(2)+f);
if xdata(3,1)==0 %值为0,代表当前执行状态为误差检验
    tanH=sinH./cosH;
    disp('杆长序列为:')
    ticks = (y0.^2+xdata(2,:).^2).^(1/2).*tanH;
    disp(ticks);
    fprintf('\n平均杆长为: %f\n', mean(ticks));
    fprintf('标准差为: %f\n', std(ticks,0,2)^(1/2));
    y0=mean(ticks);
end

```

#### fitfun.m

```

function l=fitfun(theta,alpha,time,t,h)
%用于绘制拟合曲线的函数 %theta为纬度 alpha为赤纬角 time为为杆所在位置与北京
间的时间差 t为北京时间 %为杆长

```

```

s=[cos(theta*pi/180)*sin((720-(t-time))*pi/720), cos(theta*pi/180)*cos((720-(t-time))*pi/720), sin(theta*pi/180)];
n=[0, cos(alpha*pi/180), sin(alpha*pi/180)];
sinH=abs(sum(s.*n));
cosH=(1-(sinH)^2)^(1/2);
tanH=sinH/cosH;
l=h/tanH;

```

### 3. 第三题的代码:

#### MCMA3.m

```

A=xlsread('附件1-3',2);%附件2
%A=xlsread('附件1-3',3);%附件3 切换附件时请取消本条注释,并对上调语句加上注释
x=A(:,2);
y=A(:,3);
p = x';
t=761:3:821;%附件2
%t=789:3:849;%附件3 切换附件时请取消本条注释,并对上调语句加上注释
flag=zeros(1,length(t));
flag(1,1)=1;

%该段注释代码是为求出最佳初值 采用枚举法
% d = 10;
% ii=0;jj=0;
% for i=-90:10:90
%     for j=101:10:500 %附件2
%         %for j=-360:10:69 %附件3
%             flag(1,1)=1;
%
para=lsqcurvefit(@tempfun2,[i,0,j,0],[t;x';flag],y',[-90,-2*pi,101,0],[90,2*pi,500,365]);%附件2
% %
para=lsqcurvefit(@tempfun2,[i,0,j,0],[t;x';flag],y',[-90,-2*pi,-360,0],[90,2*pi,69,365]);%附件3
%         flag(1,1)=2;
%         temp=tempfun2(para,[t;x';flag]);
%         if temp<d
%             d=temp;
%             ii=i;jj=j;
%             disp(d);
%         end
%     end

```

```

% end
% disp(d);
% disp([ii jj]);

para=lsqcurvefit(@tempfun2, [90,0,171,0], [t;x';flag], y', [-90,-2*pi,101,0], [90,2*
pi,500,365]);%附件2 切换附件时请取消本条注释,并对上调语句加上注释
%para=lsqcurvefit(@tempfun2, [70,0,40,0], [t;x';flag], y', [-90,-2*pi,-360,0], [90,2
*pi,69,365]);%附件3
flag(1,1)=0;

longitude=120-para(3)/4;
fprintf(' 纬度为: %f      投影与x轴所夹角和太阳方位角之差为: %f      杆所在位置与
北京时间的时差: %f      日期为(与1月1日相差天数): %f\n',
para(1), para(2), para(3), para(4));
fprintf(' 经度为: %f\n', longitude);
tickh=tempfun2(para, [t;x';flag]);
flag(1,1)=2;
temp=tempfun2(para, [t;x';flag]);
time=600:1:960;
H = zeros(1, length(time));
q=23.45*sin(2*pi*(284+para(4))/365);
for i=1:length(time)
    H(i)=fitfun(para(1), q, para(3), time(i), tickh);
end
plot(time,H)%以下为拟合图像
hold on
l=(x.^2+y.^2).^(1/2);
plot(t,l, 'r');
xlabel(' 时间(小时)')
ylabel(' 影长(米)')
set(gca, 'XLim', [600 960]);
set(gca, 'XTick', (600:60:960));
set(gca, 'XTickLabel', (10:1:18));

```

#### tempfun2.m

```

function y0=tempfun2(x, xdata)
%x(1)为纬度 x(2)为与投影与x轴所夹角和太阳方位角之差 x(3)为杆所在位置与北京时
间的时间差 x(4)为日期
q=(23.45*sin(2*pi*(284+x(4))/365))*pi/180;%通过日期得到赤纬角
t=xdata(1,:)-x(3);%xdata(1,:)为北京时间
for i=1:length(t)

```

```

    if t(i)>1440
        t(i) = mod(t(i), 1440);
    end
    if t(i)<0
        t(i) = mod(t(i)+1440, 1440);
    end
end
s=(720-t)*pi/720;
sinH=abs(cos(x(1)*pi/180)*cos(s)*cos(q) + sin(x(1)*pi/180)*sin(q));
cosH=(1-(sinH).^2).^(1/2);
f=asin(cos(q)*sin(s)./cosH);%f为方位角
y0=xdata(2,:).*tan(x(2)+f);
if xdata(3,1)==0 %值为0,代表当前执行状态为误差检验
    tanH=sinH./cosH;
    disp('杆长序列为:')
    ticks = (y0.^2+xdata(2,:).^2).^(1/2).*tanH;
    disp(ticks);
    fprintf('\n平均杆长为: %f\n', mean(ticks));
    fprintf('标准差为: %f\n', std(ticks,0,2)^(1/2));
    y0=mean(ticks);
end
if xdata(3,1)==2
    tanH=sinH./cosH;
    ticks = (y0.^2+xdata(2,:).^2).^(1/2).*tanH;
    y0=std(ticks,0,2)^(1/2);
end
end

```

#### 4. 第四题的代码:

##### MCMA4.m

```

rate=2/(886-203);%比率
starty=892;
y=[1680 1673 1661 1651 1642 1628 1623 1613 1603 1594 1584 1575 1566 1558 1548 1538
1528 1521 1511 1502 1495];%从图片中获取的数据
y=(y-892)*rate;
t=534:2:574;
flag=zeros(1,length(t));
flag(1,1)=1;

para=lsqcurvefit(@tempfun3, [40,0,44], t, y, [40, -2*pi, -234], [42, 2*pi, 146]);%对
tempfun3进行拟合

```



```

flag(1,1)=0;

longitude=120-para(3)/4;
fprintf(' 纬度为: %f      投影与x轴所夹角和太阳方位角之差为: %f      杆所在位置与
北京时间的时间差: %f\n      ', para(1),para(2),para(3));
fprintf(' 经度为: %f\n', longitude);

y0=tempfun3(para, t);
fprintf(' 标准差为: %f\n', std(y-y0, 0, 2)^(1/2));

time=480:1:840;
H = zeros(1, length(time));

q=23.45*sin(2*pi*(284+turndate([7 13]))/365);
for i=1:length(time)
    H(i)=fitfun(para(1), q, para(3), time(i), 2);
end
plot(time,H)

xlabel(' 北京时间(小时)')
ylabel(' 影长(米)')
set(gca, 'XLim', [480 840]);
set(gca, 'XTick', (480:60:840));
set(gca, 'XTickLabel', (8:1:16));

```

### tempfun3.m

```

function y0=tempfun3(x, xdata)
%x(1)为纬度  x(2)为与投影与x轴所夹角和太阳方位角之差  x(3)为杆所在位置与北京时
间的时间差  x(4)为日期
tickh=2;%杆长
q=(23.45*sin(2*pi*(284+turndate([7 13]))/365))*pi/180;%通过日期得到赤纬角
t=xdata(1,:)-x(3);
for i=1:length(t)
    if t(i)>1440
        t(i) = mod(t(i), 1440);
    end
    if t(i)<0
        t(i) = mod(t(i)+1440, 1440);
    end
end
s=(720-t)*pi/720;

```

```
sinH=abs(cos(x(1)*pi/180)*cos(s)*cos(q) + sin(x(1)*pi/180)*sin(q));  
cosH=(1-(sinH).^2).^(1/2);  
tanH=sinH./cosH;  
f=asin(cos(q)*sin(s)./cosH);%f为方位角  
l=tickh./tanH;%l为影长  
tanf = tan(x(2)+f);  
y0=abs((l.*tanf)./(tanf.^2+1).^(1/2));
```