1、 B 2、 D 3、C 4、D 5、 B

1、$\underline{-\frac{1}{3}(A+2I)}$

2、$\underline{(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)}$

3、$\underline{\pi/3}$

4、<u>4、0、0、0</u>

5、$\underline{\begin{cases}2x^2-y^2=-1\\ z=0\end{cases}}$ <u>或</u> $\underline{\begin{cases}2z^2-y^2=-1\\ x=0\end{cases}}$

1、$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$

解：原方程$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\4&3\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\\-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad X=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\\-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&1/6&2/3\\1/3&1/6&-1/3\\-1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\\-2&-2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-1&-11/6\\1&1/6\\-1&1/3\end{pmatrix}$$

2、解：原式 $\underline{\underline{ar_2+r_1}}\begin{vmatrix}0 & 1+ab & a & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}=(-1)(-1)^3\begin{vmatrix}1+ab & a & 0\\ -1 & c & 1\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{dc_2+c_3}}\begin{vmatrix}1+ab & a & ad\\ -1 & c & 1+cd\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-1)(-1)^5\begin{vmatrix}1+ab & ad\\ -1 & 1+cd\end{vmatrix}=(1+ab)(1+cd)+ad$$

3、解：设 l 与 l_1 的交点为 M ， M 可用 l_1 的参数表示为 $(-2t+1,t-2,t+2)$.

又，直线 l_2 的方向向量为 $s_2=(2,4,-1)$ ，则 $\overrightarrow{M_0M}\perp s_2$ ，即

$(-2t+3,t-2,t-1)\cdot(2,4,-1)=0$ 得 $t=-1$

所以 M 点的坐标为(3,-3,1)， l 过 M_0 与 M，取方向向量 $s=\overrightarrow{M_0M}=(5,-3,-2)$

由直线的点向式方程得 $l:\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$

4、解：求 A 的特征值与特征向量，令

$$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$$

其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$

将 $\lambda=-2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$ ，解得 2 个线性无关的特征向量

$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T$

将 $\lambda=4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$ ，解得特征向量为

$\alpha_3=(1,1,2)^T$

因此，矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

则 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

5、解：联立方程组和方程得新方程组，则新方程组的解即为所求的公共解.新方程组的增广矩阵经过初等行变换有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-1)(a-2)&0\\0&0&1-a&a-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1-a&a-1\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}$$

当 $a=1$ 时，有 $R(A)=R(\overline{A})=2<3$，新方程组有解，此时

$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，对应的齐次线性方程组的基础解系为 $(-1,0,1)^T$，则全部公共解为 $X=k(-1,0,1)^T$（k 为任意常数）

当 $a=2$ 时，有 $R(A)=R(\overline{A})=3$，方程组有唯一解，此时

$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，对应线性方程组的解为 $(0,1,-1)^T$，则唯一公共解为

$X = (0,1,-1)^T$

6、解：令 $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3$，二次型化为

$$\begin{aligned} f &= y_1^2 - y_2^2 + 4(y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 5y_1y_2 + 3y_2y_3 \end{aligned}$$

先对 y_1 配方，有

$$\begin{aligned} f &= (y_1 + \frac{5}{2}y_3)^2 - y_2^2 - \frac{25}{4}y_3^2 + 3y_2y_3 \\ &= (y_1 + \frac{5}{2}y_3)^2 - (y_2 - \frac{3}{2}y_3)^2 - 4y_3^2 \end{aligned}$$

$$令\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{5}{2}y_3 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{5}{2}x_3 \\ z_2 = y_2 - \frac{3}{2}y_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ z_3 = 2y_3 = 2x_3 \end{cases}$$

则，可逆线性变换为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

故，二次型的规范型为 $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$

1、证明：因为 $AA^* = A^*A = |A|I$，且 $|A| \neq 0$，可得 $A^* = |A|A^{-1}$

故

$$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = B^*A^*$$

2、证明：由于$(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{4}{9}(\gamma_1,\gamma_1)-\frac{2}{9}(\gamma_2,\gamma_2)-\frac{2}{9}(\gamma_3,\gamma_3)=\frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=0$

$(\alpha_1,\alpha_1)=\frac{4}{9}(\gamma_1,\gamma_1)+\frac{4}{9}(\gamma_2,\gamma_2)+\frac{1}{9}(\gamma_3,\gamma_3)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1$

同样可得$(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3)=0,(\alpha_2,\alpha_2)=(\alpha_3,\alpha_3)=1$，即，三向量是两两正交的单位向量组，故$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是正交矩阵。