一．单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.B 2.B 3.A 4.D 5.A

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 2，7. $\varphi(0)$，8. $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$，9. $(x+n)e^{x}$，10. 2，

三、求极限（每小题 6 分，共 18 分

11．解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-\frac{2}{n}+\frac{9}{n^2}}{8-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}-\dfrac{1+(\frac{3}{4})^n}{4-3(\frac{3}{4})^n}\right)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$ 6 分

12．解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$。 6 分

13.解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}$ 4 分

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$ 6 分

四、求导数与微分（每小题 6 分，共 18 分）

14. 解： $y'=f'(x^3)(x^3)'=3x^2f'(x^3)$ 3 分

$y''=6xf'(x^3)+3x^2[f'(x^3)]'=6xf'(x^3)+9x^4f''(x^3)$ 6 分

15 解：将方程 $y=1-xe^y$ 两边对 x 求导，

$y'=-e^y-xe^yy'$， $y'=-\dfrac{e^y}{1+xe^y}$ 3 分

将 $x=0$ 带入方程 $y=1-xe^y$，得 $y=1$ 4 分

曲线 $y=1-xe^y$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=0,y=1}=-\frac{e^y}{1+xe^y}\Big|_{x=0,y=1}=-e$$ **5 分**

所求切线方程为 $y=1-ex$ **6 分**

16. 解：$\dfrac{dy}{dt}=3t^2+2t$，$\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}$， 2 分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2t}{\frac{t}{1+t}}=3t^2+5t+2,$$ 3 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t+5}{\frac{t}{1+t}}=6t+11+\frac{5}{t}$$ 6 分

五．解答题(每小题 8 分，共 16 分)

17 解：使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，必使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{a}{x^2}(1-\cos x)=\frac{a}{2}，\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2+bx+1)=1，$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 解得 $a=2$， 3 分

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2(1-\cos x)}{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\cos x-2}{6x}=0 \qquad f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+bx+1-1}{x}=b$$ 6 分

使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f_-'(0)=f_+'(0)$，$b=0$ 7 分

当 $a=2$、$b=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。 8 分

18. 解：函数 $y=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，

$$y'=2x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(2x-5)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{6x+2(2x-5)}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{10x-10}{3x^{\frac{1}{3}}}$$ 1 分

$$y''=\frac{10\cdot x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(10x-10)x^{-\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{10(2x+1)}{9x^{\frac{4}{3}}},$$ 3 分

令 $y''=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$，且函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

$x=0$	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	−	0	+	不存在	+
y	上凸		上凹		上凸

曲线 $y=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2}],[0,+\infty)$ 上上凹，

曲线 $y=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[-\frac{1}{2},0]$ 上上凸， 7 分

点 $(-\frac{1}{2},-3\sqrt[3]{2})$、$(0,0)$ 是曲线 $y=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的拐点。 8 分

六．证明题(每小题 5 分，共 10 分)

19. 证：(1)设 $f(x)=x^5+x-1$， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

$f(0)=-1,\ f(1)=1,$ 即有 $f(0)\cdot f(1)\prec 0$ 由零点存在定理至少存在一个 $\xi\in(0,1)$

使得 $f(\xi)=0$， 即方程 $x^5+x-1=0$ 至少有一个正实根。 3 分

(2)假设存在另一个 $\xi_1\in(0,1),\ \xi_1\neq\xi$，使得 $f(\xi_1)=0$，

不妨设 $\xi_1\prec\xi$， $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ) 内可导，

$f(\xi_1)=f(\xi)=0$，由罗尔定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi)$，使得 $f'(\eta)=0$ 4 分

而 $f'(x)=5x^4+1>1$，故矛盾，因此假设不成立，

方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正实根。 5 分

注：也可以利用单调性来证明唯一性。

20. 证：设 $F(x)=(x-1)f(x)$，由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=-f(0)=0,\ F(1)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$ 3 分

$F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$，而 $F'(\xi)=f(\xi)+(\xi-1)f'(\xi)=0$ 4 分

即存在点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)$。 5 分

21．解：显然 $r^2+h^2=l^2$，圆柱体的体积为 $V=\pi r^2 h$ 1 分

$V=\pi(l^2-h^2)h=\pi(l^2h-h^3)$ $h\in(0,+\infty)$ $\dfrac{dV}{dh}=\pi(l^2-3h^2)$ $\dfrac{d^2V}{dh^2}=-6\pi h$ 4 分

$\dfrac{dV}{dh}=\pi(l^2-3h^2)=0$，得驻点 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}l$，$\left.\dfrac{d^2V}{dh^2}\right|_{h=\frac{\sqrt{3}l}{3}}<0$ 6 分

当 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}l$，$r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}l$ 时，圆柱体的体积最大。 8 分

一．选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.A 2.B 3.A 4.D 5.B

二．填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. $\frac{1}{3}$，7. 4，8. $-4x f'(1-2x^2)dx$，9. $(x+n)e^x$，10. 2，

三．计算题（本大题共 3 个小题，每小题 6 分，满分 18 分）

11. 解：原式=$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})(x-1)(x+1)}$ 3 分

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})(x+1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 6 分

12. 解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$ 2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$ 6 分

13. 解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$ 3 分

$\overset{\frac{0}{0}}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}$ 6 分

四. **解答题（本大题共 3 个小题，每小题 6 分，满分 18 分）**

14. 解: 将 $y=(\frac{x}{x+1})^x$ 取对数, 得

$\ln y = x\ln\frac{x}{x+1} = x\ln x - x\ln(x+1)$ 2 分

将上述方程两边对 x 求导, 得

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \ln x + 1 - \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ 5 分

$\frac{dy}{dx} = (\frac{x}{1+x})^x(\ln x + 1 - \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}) = (\frac{x}{1+x})^x(\ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1})$ 6 分

15.解. $\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2t$ $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{t+1} = \frac{t}{1+t}$ 2 分

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+2t}{t/(t+1)} = 3t^2 + 5t + 2$ 4 分

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{(3t^2+5t+2)'}{(t-\ln(t+1))'} = \frac{6t+5}{t/(t+1)} = 6t + 11 + \frac{5}{t}$ 6 分

16. 解：将 $x=0$ 代入方程 $e^y + xy = e$ 得 $y=1$ 1 分

将方程 $e^y + xy = e$ 两边对 x 求导：$e^y\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0$， 3 分

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{e^y + x}$， $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{1}{e}$ 5 分

曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为: $y-1 = -\frac{1}{e}x$ 6 分

五、应用题（本大题共 2 个小题，每小题 8 分，满分 16 分）

17. 解: $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$ 2 分

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-1)=-1\neq f(1)=0$,$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}1=1\neq f(1)=0$

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 不连续 ，$x=1$ 为函数 $f(x)$ 在的第一类跳跃间断点. 4 分

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(1)=1\neq f(-1)=0$ ， $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(-1)=-1\neq f(-1)=0$

函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 不连续 ，$x=-1$ 为函数 $f(x)$ 在的第一类跳跃间断点. 7 分

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 内连续 . 8 分

18.解. $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续， $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=a+b=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=1$ 得 $a+b=1$ 2 分

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$ 4 分

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{ax+b-1}{x-1}=a$$ 6 分

$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 即 $f'_+(1)=f'_-(1)$ 得 $a=2$ 从而 $b=-1$ 7 分

当 $a=2,b=-1$ 时， $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导. 8 分

六、综合题（本大题共 3 个小题，每小题 6 分，满分 18 分）

19. 证 由于 $\frac{n^2}{n^2+n} \le x_n = n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}) \le \frac{n^2}{n^2+1}$ 3 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$ 4 分

由夹逼准则, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n})=1$ 6 分

20. 证 由于 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[b,a]$ 上连续, 在区间 (b,a) 上内可导

由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi\in(b,a)$, 使得

$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$ 4 分

由于 $\xi\in(b,a)$， $0<b<\xi<a$, 得: $\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$.

从而有 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ 6 分

21. 解. 由于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}(x-a)^2=0$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, 故 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的连续 2 分

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}(x-a)=0$

故 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的可导 4 分

由于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 故由函数极限的保号性知, 存在点 $x=a$ 的的去心邻

域 $U(\hat{a},\delta)$, 则对 $\forall x\in U(\hat{a},\delta)$, 有 $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$, 即 $f(x)<f(a)$

函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处取得极大值. 6 分